ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО «Пермский государственный университет»

Д.В.Любимов, Т.П.Любимова

ФИЗИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА
РАСЧЕТНЫЙ СЕМИНАР

Учебное пособие

Пермь 2007

УДК 532.5.013.4
ББК 22.253.3
Л68

Любимов Д.В.
Л68 Физическая гидродинамика. Расчетный семинар: учеб. пособие/ Д.В.Любимов, Т.П.Любимова; Перм. ун-т. – Пермь, 2007. – 84 с.:ил.
ISBN5-7944-0818-9

В данном пособии рассматривается ряд задач устойчивости гидродинамических систем.
Предназначено для студентов старших курсов физических факультетов университетов и аспирантов, специализирующихся по теоретической физике и физической гидродинамике.

Ил.25.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Пермского государственного университета

Рецензент: зав.каф. теоретической физики и компьютерного моделирования Перм. гос. пед. ун-та проф. ***Р.В.Бирих***

Данное пособие является победителем конкурса, проведенного Пермским государственным университетом в ходе реализации инновационной образовательной программы «Формирование информационно-коммуникационной компетентности выпускников классического университета в соответствии с потребностями информационного общества» в рамках приоритетного национального проекта «Образование».

ISBN5-7944-0818-9

УДК 532.5.013.4
ББК 22.313

1. Гравитационные волны

1.1. Общие положения

Свободная поверхность жидкости, находящаяся в равновесии в поле тяжести, – плоская. Если под влиянием какого-то внешнего воздействия жидкость выводится из положения равновесия, то в ней возникает движение. Это движение будет распространяться по всей поверхности жидкости в виде волн. В случае, когда можно пренебречь капиллярными явлениями, волны называют гравитационными. При распространении гравитационных волн движение сосредоточено вблизи свободной поверхности, его интенсивность уменьшается с глубиной.

Рассмотрим гравитационные волны на свободной поверхности идеальной жидкости. Будем считать, что скорость движения частиц жидкости настолько мала, что в уравнении Эйлера можно пренебречь нелинейным слагаемым $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ по сравнению с $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\vec{g}\ .$$

Преобразуем вектор ускорения свободного падения к градиентному виду

$$\vec{g}=-\nabla gz\ .$$

Уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\frac{\nabla p}{\rho}-\nabla\left(gz\right),\\&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec{v}=0,\\&\frac{dS}{dt}=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Выясним физический смысл условия

$$\left(\vec{v}\nabla\vec{v}\right)<<\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\ .\tag{2}$$

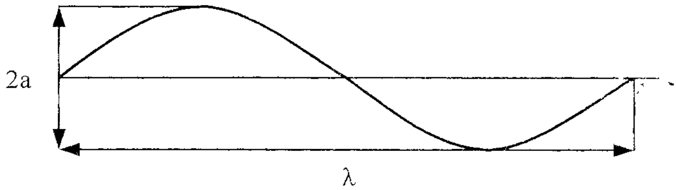


Рис.1

В течение промежутка времени порядка τ частицы жидкости проходят расстояние порядка амплитуды волны a, поэтому скорость их движения v порядка $\frac{a}{\tau}$.

Скорость заметно меняется на протяжении интервалов времени порядка τ и расстояний в направлении распространения волны порядка λ, где λ – длина волны. Это означает, что производная от скорости по времени имеет порядок величины $\frac{\mathrm{v}}{\tau}$, а производные от скорости по координатам – порядок $\frac{\mathrm{v}}{\lambda}$.

Таким образом,

$$\mathrm{v} \sim \frac{a}{\tau}, \quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} \sim \frac{a}{\tau^2}, \quad |\nabla \mathrm{v}| \sim \frac{a}{\tau\lambda}. \tag{3}$$

Подставив оценки (3) в условие (2), получаем

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2 << \frac{a}{\tau}\frac{1}{\tau}$$

или

$$a << \lambda. \tag{4}$$

Таким образом, амплитуда волны должна быть мала по сравнению с ее длиной. Такие волны называют покатыми.

Докажем теперь, что рассматриваемое движение потенциально. Применим к первому уравнению системы (1) $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\nabla p}{\rho} - \nabla gz$ операцию взятия ротора

$$\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\frac{\nabla p}{\rho} - \mathrm{rot}\nabla gz$$

или, поскольку $\mathrm{rot}\nabla = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{v} = 0\,,$$

т.е.

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \mathrm{const}(t)\,. \qquad (5)$$

Чтобы найти константу, усредним уравнение (5) по времени

$$\overline{\mathrm{rot}\vec{v}} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{rot}\vec{v}dt = \frac{1}{\tau}\mathrm{rot}\int_0^\tau \vec{v}(t)dt\,.$$

Мы считаем скорость периодической функцией времени с равным нулю средним за период значением

$$\int_0^\tau \vec{v}(t)dt = 0\,,$$

тогда $\mathrm{const} = 0 = \mathrm{rot}\vec{v}(t)$, т.е.

$$\mathrm{rot}\vec{v}(t) = 0\,. \qquad (6)$$

Это означает, движение является потенциальным, и его скорость может быть представлена в виде

$$\vec{v} = \nabla\varphi\,, \qquad (7)$$

где φ – потенциал скорости.

Фактически мы доказали, что любое слабое колебательное движение идеальной жидкости является потенциальным.

Подставив выражение (7) в уравнение непрерывности, получаем $\mathrm{div}\nabla\varphi = 0$, или

$$\Delta\varphi = 0, \;\; \vec{v} = \nabla\varphi \,. \qquad (8)$$

1.2. Гравитационные волны на свободной поверхности жидкости в глубоком бассейне

Рассмотрим бесконечно глубокий бассейн с жидкостью. Верхней, свободной границе жидкости соответствует $z = 0$, нижней границе $z = -\infty$.

Подставим выражение для скорости $\vec{v} = \nabla\varphi$ в уравнение Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla gz \,.$$

Считая плотность постоянной, получим

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = \mathrm{const}(x, y, z) = f(t) \,. \qquad (9)$$

Поскольку $\vec{v} = \nabla\varphi$, то потенциал определен с точностью до произвольной функции времени.

Удобно ввести новый потенциал

$$\varphi'' = \varphi + \int f(t)dt \,. \qquad (10)$$

Тогда уравнение (9) перепишется в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + f(t) + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \,.$$

Отсюда

$$p = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \rho gz \,. \qquad (11)$$

Фактически мы нашли первый интеграл движения, так называемый интеграл Коши-Лагранжа.

Будем обозначать z-координату точек поверхности через $\zeta = \zeta(x, y, t)$.

Уравнение, определяющее рельеф поверхности, будет иметь вид

$$z = \zeta . \tag{12}$$

В равновесии $\zeta = 0$, т.е. ζ – вертикальное смещение свободной поверхности жидкости при колебаниях.

Пусть на поверхности жидкости действует давление p_0. Поскольку поверхность свободная, можно записать равенство внешнего и внутреннего давлений на поверхности жидкости (мы пренебрегаем капиллярными явлениями и считаем, что плотность воздуха мала по сравнению с плотностью жидкости и его движение под действием волнения поверхности может породить лишь пренебрежимые по величине градиенты давления)

$$(p)_{z=\zeta} = p_0 . \tag{13}$$

Из соотношения (11) с учетом (13) получаем

$$-\rho g \zeta - \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} = p_0 . \tag{14}$$

Примем константу p_0 за начало отсчета давления. Тогда граничное условие (14) примет вид

$$\rho g \zeta - \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} = 0 ,$$

откуда

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} . \tag{15}$$

Заметим, что

$$(\mathrm{v}_z)_\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t} , \tag{16}$$

т.е. вертикальная скорость движения точек поверхности совпадает с производной по времени от смещения ζ (кинематическое условие).

Из выражения (16) с учетом $\vec{v} = \nabla\varphi$ получаем

$$(v_z)_{z=\zeta} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}. \tag{17}$$

Подставив выражение (15) для ζ в (17), получим граничное условие в окончательном виде

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta} = 0. \tag{18}$$

Разложим (18) в ряд около точки $z = 0$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0}\zeta + \ldots .$$

Заметим, что $v = \nabla\varphi \sim \frac{a}{\tau} \sim \frac{\varphi}{\lambda}$, откуда $\varphi \sim a$ и $\zeta \sim a$. Это означает, что второе слагаемое в правой части квадратично по амплитуде волны a, а следующее– кубично, и их можно отбросить, поскольку мы рассматриваем только линейные по a слагаемые. В результате получается граничное условие в виде:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0}, \tag{19}$$

т.е. граничное условие (18) сносится на невозмущенную (спрямленную) поверхность жидкости.

Аналогично поступаем с условием (15)

$$\zeta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=\zeta}, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0}\zeta + \ldots,$$

т.е. с точностью до членов первого порядка по a

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0},$$

т.е. $\zeta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0}$.

Полная система уравнений и граничных условий принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\varphi = 0, \\
&\zeta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0}, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0, \\
&\varphi(z \to -\infty) = 0.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Будем рассматривать такие волны, для которых вектор скорости лежит в плоскости xy и все поля не зависят от y. Такие волны называют плоскими.

Представим решение в виде простой периодической функции времени и координат

$$\varphi = \cos(kx - \omega t) f(z). \tag{21}$$

Подставим это выражение для потенциала скорости φ в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0\,. \tag{22}$$

В результате получаем уравнение

$$-k^2\cos(kx - \omega t) f(z) + \cos(kx - \omega t)\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z)$$

или, поделив на общий множитель $\cos(kx - \omega t)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f = 0\,.$$

Таким образом, мы получили однородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решением является комбинация экспонент

$$f = Ae^{kz} + Be^{-kz}\,.$$

Из условия (20) затухания решения на бесконечности следует, что постоянная B должна быть положена равной нулю.

Тогда

$$\varphi = A e^{kz} \cos(kx - \omega t)\,.$$

Найдем выражение для компонент скорости $\vec{v} = \nabla\varphi$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -Ake^{kz}\sin(kx - \omega t), \\ v_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} = Ake^{kz}\cos(kx - \omega t). \end{aligned} \tag{23}$$

Рассмотрим затухание решения с глубиной (поскольку $\vec{v}$ и φ имеют одинаковую структуру по координате z, выводы справедливы для обеих величин). Уже на глубине $\lambda = 2\pi / k$ амплитуда уменьшается в $e^{2\pi} \sim 535$ раз. Таким образом, бассейн глубиной, равной длине волны, уже можно считать бесконечно глубоким.

Найдем дисперсионное соотношение (связь между частотой и волновым вектором). Подставив решение φ во второе граничное условие системы (20), получим

$$\left(Ake^{kz}\cos(kx - \omega t) - \frac{1}{g}A\omega^2 e^{kz}\cos(kx - \omega t)\right)_{z=0} = 0\,,$$

$$Ak - \frac{\omega^2}{g}A = 0\,,$$

$$k = \frac{\omega^2}{g}, \tag{24}$$

откуда фазовая скорость

$$W = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{kg}{k^2}} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\,, \tag{25}$$

а групповая скорость распространения волны

$$U = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{26}$$

Таким образом, фазовая скорость не является константой, гравитационные волны имеют дисперсию и волновой пакет с течением времени расплывается.

Из соотношений (23) видно, что вектор скорости в данной точке с течением времени описывает окружность с частотой ω.

Найдем траектории движения частиц жидкости

$$\mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt} \qquad \mathrm{v}_z = Ake^{kz}\cos(kx - \omega t),$$
$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt} \qquad \mathrm{v}_x = -Ake^{kz}\sin(kx - \omega t). \tag{27}$$

Отсюда для смещений имеем

$$dz = Ake^{kz}\cos(kx - \omega t)\,dt, \quad dx = -Ake^{kz}\sin(kx - \omega t)\,dt. \tag{28}$$

Разложим компоненты скорости в ряд около некоторой точки $(x_0; z_0)$ - среднего положения жидкой частицы

$$Ake^{kz}\cos(kx - \omega t) = \left[Ake^{kz}\cos(kx - \omega t)\right]_{\substack{x=x_0\\ z=z_0}} + \dots, \tag{29}$$

$$-Ake^{kz}\sin(kx - \omega t) = \left[-Ake^{kz}\sin(kx - \omega t)\right]_{\substack{x=x_0\\ z=z_0}} + \dots. \tag{30}$$

Следующие члены, пропорциональные dx и dz, квадратичны по амплитуде a и в рассматриваемом (линейном) приближении должны быть отброшены.

Тогда выражения для смещений dz и dx принимают вид

$$dz = Ake^{kz_0}\cos(kx_0 - \omega t)dt,$$
$$dx = -Akc^{kz_0}\sin(kx_0 - \omega t)dt. \tag{31}$$

После интегрирования получаем

$$x = -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\cos(kx_0 - \omega t) + const_1,$$
$$z = -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\sin(kx_0 - \omega t) + const_2. \tag{32}$$

Осредним (32) по периоду. Поскольку средние от $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ по периоду равны нулю, получаем

$$\overline{x} = const_1, \quad \overline{z} = const_2. \tag{33}$$

Поскольку мы с самого начала предположили, что среднее положение жидкой частицы есть (x_0, z_0), то из (33) следует

$$const_1 = x_0, \quad const_2 = z_0. \tag{34}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\cos(kx_0 - \omega t), \\ z - z_0 &= -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\sin(kx_0 - \omega t). \end{aligned} \tag{35}$$

Мы получили уравнения движения по окружности с центром в точке (x_0, z_0) и радиусом $R = A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}$, экспоненциально убывающим с глубиной.

1.3. Гравитационные волны на свободной поверхности жидкости в случае бассейна конечной глубины

Рассмотрим задачу о распространении гравитационных волн в бассейне конечной глубины h, схематично изображённом на рис.2.

Выберем оси координат таким образом, что плоскость xy соответствует невозмущенной поверхности жидкости, а ось z направлена вертикально вверх.

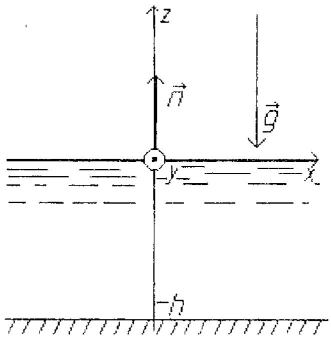


Рис.2

Для задачи с конечной глубиной бассейна с идеальной жидкостью имеем такую систему:

$$\Delta\varphi = 0, \tag{36}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0, \tag{37}$$

где φ - потенциал скорости, t – время, g –ускорение свободного падения.

Граничное условие на нижней границе отличается от условия, использованного в предыдущем разделе при рассмотрении волн на свободной поверхности жидкости в глубоком бассейне. Поскольку мы рассматриваем идеальную жидкость, то на нижней твердой границе должно ставиться условие отсутствия нормальной компоненты скорости

$$(v_z)_{z=-h} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0 \ . \tag{38}$$

Будем искать решение в виде простой периодической функции времени и координаты x:

$$\varphi = f(z)\cos(kx - \omega t) \ , \tag{39}$$

где ω - циклическая частота, $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число (λ - длина волны).

Мы рассматриваем одномерные волны (однородная задача относительно y). Тогда первое уравнение (1) даёт

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

или, учитывая (39),

$$-k^2 f\cos(kx - \omega t) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cos(kx - \omega t) = 0$$

и, разделив на $\cos(kx - \omega t)$, получаем

$$-k^2 f + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \ .$$

Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$f = Ae^{kz} + Be^{-kz}.$$

Подставляем решение в таком виде в (39), получаем

$$\varphi = (Ae^{kz} + Be^{-kz})\cos(kx - \omega t). \qquad (40)$$

Используя граничное условие (38), получаем

$$\left.(Ake^{kz} - Bke^{-kz})\cos(kx - \omega t)\right|_{z=-h} = 0$$

или

$$(Ake^{-kh} - Bke^{kh})\cos(kx - \omega t) = 0.$$

Отсюда, при $\cos(kx - \omega t) \neq 0$, следует

$$Ake^{-kh} - Bke^{kh} = 0 \Rightarrow A = B\frac{e^{kh}}{e^{-kh}} = Be^{2kh}.$$

Подставляя выражение для A в (40), получаем

$$\varphi = (Be^{2kh}e^{kz} + Be^{-kz})\cos(kx - \omega t).$$

Умножим на $e^{-kh}/2 = const$ и введем обозначение $B_1 = 2B/e^{-kh}$, тогда

$$\varphi = B_1\frac{e^{kh+kz} + e^{-kh-kz}}{2}\cos(kx - \omega t) = B\operatorname{ch}k(h+z)\cos(kx - \omega t)\ .$$

Подставляя это выражение в граничное условие (37), получаем

$$B_1\cos(kx - \omega t)\left.\left(k\operatorname{sh}k(h+z) - \frac{\omega^2}{g}\operatorname{ch}k(h+z)\right)\right|_{z=0} = 0\ .$$

Сократив на общий множитель, получим

$$\left.\left(k\operatorname{sh}k(h+z) - \frac{\omega^2}{g}\operatorname{ch}k(h+z)\right)\right|_{z=0} = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = kg\,\mathrm{th}\,kh\,. \tag{41}$$

Выражение (41) – это ***дисперсионное соотношение***, из которого можно найти фазовую скорость W и групповую скорость V

$$W = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}\,\mathrm{th}\,kh}\,, \tag{42}$$

$$\begin{aligned} V = \frac{d\omega}{dk} &= \sqrt{g}\sqrt{\mathrm{th}\,kh}\,\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{g}\sqrt{k}\,\frac{1}{2}(\mathrm{th}\,kh)^{-\frac{1}{2}}h\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,kh} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}\,\mathrm{th}\,kh} + \frac{1}{2}h\sqrt{\frac{gk}{\mathrm{th}\,kh}}\,\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,kh} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k\,\mathrm{th}\,kh}}\left(\mathrm{th}\,kh + \frac{kh}{\mathrm{ch}^2\,kh}\right). \end{aligned} \tag{43}$$

Рассмотрим предельные случаи глубокого и мелкого бассейнов:

1) $kh >> 1$ или $h >> \lambda/2\pi$, 2) $kh << 1$ или $h << \lambda/2\pi$.

В случае глубокого бассейна $\mathrm{th}\,kh \approx 1$ (см., рис. 3, штрихпунктирная линия).

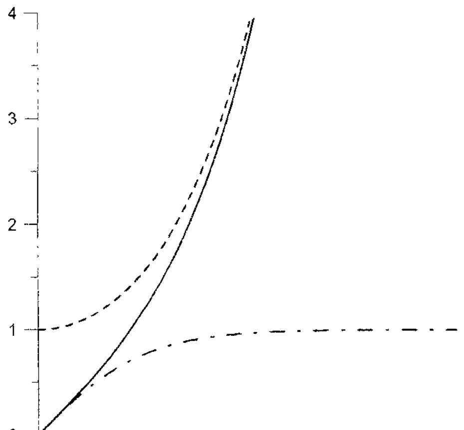


Рис.3

Функция $\mathrm{ch}^2\,kh$ (рис. 4, штриховая линия) растет гораздо быстрее, чем kh (рис. 4, сплошная линия), поэтому при $kh >> 1$ имеем $kh/\mathrm{ch}^2\,kh << 1$.

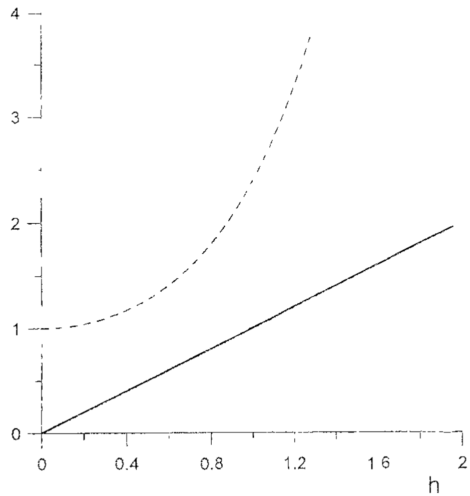


Рис.4

С учетом этого из (42)-(43) получаем выражения для фазовой и групповой скоростей в виде

$$W = \sqrt{\frac{g}{k}}\ , V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} \cdot (1+0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}.$$

В случае мелкого бассейна $\mathrm{ch}^2\, kh \approx 1$, $\mathrm{th}\, kh \approx kh$ (см., рис. 3 и 2).

В этом можно также убедиться, разлагая эти функции в ряд

$$\mathrm{ch}^2\, kh = 1 + (kh)^2 + \ldots\ , \ \mathrm{th}\, kh = kh - (kh)^3 / 3 + \ldots$$

и сохраняя лишь первые члены разложения.

Подставляя эти выражения в (43), получим

$$V = \sqrt{g} \cdot \left(\frac{\sqrt{kh}}{2\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}h}{2\sqrt{kh} \cdot 1} \right) = \sqrt{g} \cdot \left(\frac{\sqrt{h}}{2} + \frac{\sqrt{h}}{2} \right) = \sqrt{gh}\ .$$

Таким образом, в предельном случае мелкого бассейна групповая скорость не зависит от длины волны λ и пропорциональна $\sqrt{h}$. Для этого случая используется название «мелкая вода».

Дисперсионное соотношение (41) в предельном случае мелкого бассейна приобретает вид

$$\omega^2 = kg \cdot kh = k^2 gh \Rightarrow \omega = k\sqrt{gh} \ .$$

Отсюда для фазовой скорости получаем

$$W = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh} \ .$$

Из этого выражения видно, что скорость волн тем меньше, чем мельче бассейн. Именно поэтому волны при подходе к берегу стремятся повернуться параллельно ему (рис. 5).

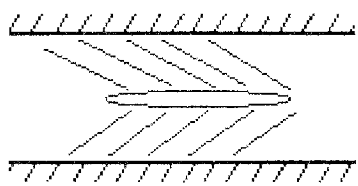


Рис.5

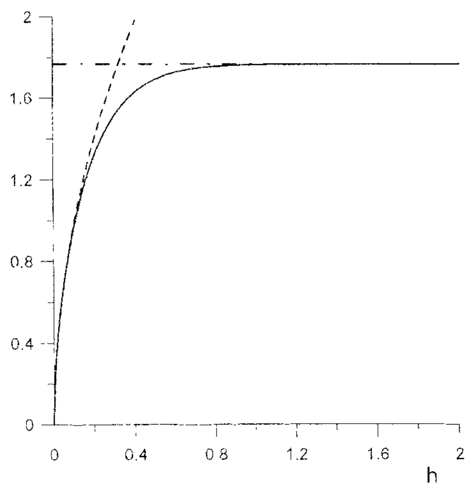


Рис.6

Зависимости фазовой скорости волны от глубины бассейна представлены на рис.6; сплошная линия – зависимость (42), полученная для бассейна конечной глубины, штриховая линия –

формула $W \approx \sqrt{gh}$, соответствующая мелкому бассейну, штрихпунктирная линия – формула $W \approx \sqrt{g/k}$, соответствующая бесконечно глубокому бассейну.

1.4. Гравитационные волны на поверхности раздела в случае, когда верхняя жидкость ограничена сверху, а нижняя жидкость - снизу твердыми неподвижными плоскостями

Определим связь между частотой и длиной волны для гравитационных волн на поверхности раздела двух идеальных жидкостей в случае, когда верхняя жидкость ограничена сверху, а нижняя - снизу твердыми неподвижными плоскостями.

Обозначим плотность и глубину слоя нижней жидкости ρ и L, а верхней - ρ' и L' (причем $\rho > \rho'$).

На ограничивающих плоскостях нормальные компоненты скоростей жидкостей должны обращаться в нуль

$$\mathrm{v}_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h \ , \quad \mathrm{v}_z{}' = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h' .$$

На поверхности раздела жидкостей $z = \zeta$ должны выполняться условия непрерывности нормальной компоненты скорости и давления. Первое из этих условий записывается в виде

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{z=\zeta} = \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right)_{z=\zeta} ,$$

второе, согласно ранее полученному уравнению $p = -\rho g z - \rho \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$, – в виде

$$-\rho g \zeta - \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} = -\rho' g \zeta - \rho' \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right)_{z=\zeta} . \qquad (44)$$

Кроме того, должно выполняться кинематическое условие

$$(v_n)_{z=\zeta} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{z=\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}. \tag{45}$$

Выразив ζ из условия (44) и продифференцировав полученное выражение по времени, получим

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{1}{g(\rho-\rho')}\left(\rho'\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta}.$$

Как и в предыдущих задачах, мы ограничиваемся линейными слагаемыми и сносим граничные условия на невозмущенную границу раздела, т.е. во всех условиях на поверхности раздела заменяем $z=\zeta$ на $z=0$. При этом получаются следующие граничные условия:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)_{z=0}, \tag{46}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{1}{g(\rho-\rho')}\left(\rho'\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0}. \tag{47}$$

Будем искать решения в обеих жидкостях в таком виде, чтобы удовлетворялись условия на верхней и нижней границах

$\varphi = A\,\mathrm{ch}(k(z+h))\cos(kx-\omega t)$, $\varphi' = B\,\mathrm{ch}(k(z-h'))\cos(kx-\omega t)$.

Подставляя решения в таком виде в условие (46), получим

$$\cos(kx-\omega t)\big(Ak\,\mathrm{ch}\,k(z+h) - Bk\,\mathrm{ch}\,k(z-h')\big)_{z=0} = 0,$$

отсюда

$$A = -B\frac{\mathrm{sh}\,kh'}{\mathrm{sh}\,kh}.$$

В результате для нижней жидкости имеем

$$\varphi = -B\frac{\mathrm{sh}\,kh'}{\mathrm{sh}\,kh}\mathrm{ch}\,k(z+h)\cos(kx-\omega t).$$

Подставляя выражения для φ и φ' в условие (47) на границе раздела жидкостей, получаем

$$\left(-B\frac{\operatorname{sh}kh'}{\operatorname{sh}kh}\operatorname{ch}k(z+h)\cos(kx-\omega t)\right)_{z=0}' =$$

$$= -B\cos(kx-\omega t)\frac{\rho\omega^2}{g(\rho-\rho')}\left(\frac{\operatorname{sh}kh'}{\operatorname{sh}kh}\operatorname{ch}k(z+h)+\operatorname{ch}k(z-h')\right)_{z=0}$$

или

$$k\operatorname{sh}kh' = \frac{\omega^2}{g(\rho-\rho')}\left(\rho'\operatorname{ch}kh'+\rho\operatorname{sh}kh'\operatorname{cth}kh\right).$$

Отсюда

$$\omega^2 = kg\frac{\rho-\rho'}{\rho'\operatorname{cth}kh'+\rho\operatorname{cth}kh}.$$

Мы получили дисперсионное соотношение, теперь рассмотрим различные предельные случаи.

1. Если $kh \gg 1$ и $kh' \gg 1$ (обе жидкости глубоки), то ни дно, ни крышка не оказывают влияния, при этом $\operatorname{cth}kh = 1+\ldots$ и дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2 = kg\frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'}.$$

Если положить ρ' малым, то получается $\omega^2 = kg$ – результат совпадает с результатом предыдущей задачи: при $\rho'=0$ дисперсионное соотношение имеет вид $\omega^2 = kg\operatorname{th}(kh)$.

2. Если $kh \ll 1$ и $kh' \ll 1$ (длинные волны), то $\operatorname{cth}kh = \dfrac{1}{kh}+\ldots$ и дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2 = k^2 g\frac{\rho-\rho'}{\rho'/h'+\rho/h}.$$

Как видно, в этом случае частота пропорциональна волновому числу, т.е. дисперсии нет, фазовая скорость одинакова для всех волн.

Мы с самого начала предполагали, что $\rho > \rho'$, и получили $\omega^2 > 0$. Если формально положить $\rho < \rho'$, то получим $\omega^2 < 0$. Этот результат имеет простой смысл: если плотность верхней жидкости больше, чем нижней, то зависимость возмущений от времени на самом деле не колебательная, как мы предполагали, а монотонная, причем есть экспоненциально нарастающие возмущения, т.е. основное состояние с плоской поверхностью раздела неустойчиво.

1.5. Гравитационные волны на поверхности раздела жидкостей, верхняя из которых имеет свободную поверхность

Рассмотрим двухслойную систему горизонтальных слоев несмешивающихся идеальных жидкостей, верхняя из которых имеет свободную поверхность, т.е. может совершать колебания.

Как и в предыдущем случае, величины, относящиеся к верхней жидкости, будем обозначать штрихованными величинами, так что h' – глубина верхней жидкости, h – нижней.

Поскольку движение потенциально, то поведение каждой из жидкостей описывается уравнением Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\varphi' = 0.$$

Обсудим граничные условия. На нижней, твердой, границе нормальная компонента скорости нижней жидкости обращается в нуль

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0. \tag{48}$$

Граничные условия на границе раздела в линейном по амплитуде волны приближении записываются в виде

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)_{z=0}. \tag{49}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}. \tag{50}$$

$$\left(g\left(\rho-\rho'\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}=\left(\rho'\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}-\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0}, \tag{51}$$

На верхней свободной границе ставится условие, аналогичное условию (37)

$$\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}\right)_{z=h'}=0\,. \tag{52}$$

Будем считать, что глубина нижней жидкости бесконечно велика. В этом случае на нижней границе вместо (48) должно ставиться условие

$$\lim_{z\to-\infty}\varphi\neq\infty\,,$$

в общем решении уравнения для потенциала скорости нижней жидкости одна экспонента выбрасывается и мы получаем

$$\begin{aligned}\varphi&=Ae^{kz}\cos(kx-\omega t),\\ \varphi'&=\left(Be^{-kz}+Ce^{kz}\right)\cos(kx-\omega t).\end{aligned} \tag{53}$$

Подставляя решения в таком виде в граничное условие (49), получим

$$\left(Ake^{kz}\right)_{z=0}=\left(B-ke^{-kz}+Cke^{kz}\right)_{z=0},$$

откуда

$$A=C-B\,.$$

Подставляя полученное значение постоянной A в выражение для потенциала скорости нижней жидкости, будем иметь

$$\varphi=(C-B)e^{kz}\cos(kx-\omega t)\,.$$

Используем граничное условие (52) для нахождения констант

$$\left(-kBe^{-kz}+Cke^{kz}+\frac{\omega^2}{g}\left(Be^{-kz}+Ce^{kz}\right)\right)_{z=h'}=0\,,$$

откуда

$$Cke^{kh'} - Bke^{-kh'} + \frac{\omega^2}{g}\left(Be^{-kh'} + Ce^{kh'}\right) = 0 .$$

Разделим переменные

$$Ce^{kh'}\left(1 - \frac{\omega^2}{kg}\right) = Be^{-kh'}\left(1 + \frac{\omega^2}{kg}\right),$$

умножим обе части равенства на $e^{kh'}$

$$B\left(1 + \frac{\omega^2}{kg}\right) = Ce^{2kh'}\left(1 - \frac{\omega^2}{kg}\right),$$

$$Ce^{2kh'} = B\delta , \qquad (54)$$

где $\delta = \left(1 + \dfrac{\omega^2}{kg}\right) \Big/ \left(1 - \dfrac{\omega^2}{kg}\right)$.

Мы нашли связь между постоянными C и B. С учетом найденных выражений для констант используем граничное условие (51)

$$\left[kg\left(\rho - \rho'\right)(C - B)e^{-kz}\right]_{z=0} =$$
$$= \left[-\omega^2\rho'\left(Be^{-kz} + Ce^{kz}\right) + \rho(C - B)e^{kz}\omega^2\right]_{z=0} .$$

Подставляем $z = 0$

$$kg\left(\rho - \rho'\right)(C - B) = -\omega^2\rho'(B + C) + \rho\omega^2(C - B),$$

собираем множители при C и B

$$\left\{\left(\rho - \rho'\right) + \frac{\omega^2}{kg}\left(\rho' - \rho\right)\right\}C = \left\{\left(\rho - \rho'\right) - \frac{\omega^2}{kg}\left(\rho + \rho'\right)\right\}B ,$$

при постоянной C выделяем общий множитель $\left(\rho - \rho'\right)$,

$$C\left(\rho - \rho'\right)\left(\frac{\omega^2}{kg} - 1\right) = B\left\{\left(\rho + \rho'\right)\frac{\omega^2}{kg} - \left(\rho - \rho'\right)\right\} . \qquad (55)$$

Подставляем в (55) выражение (54), связывающее C и B,

$$B\left\{\left(\rho+\rho'\right)\frac{\omega^2}{kg}-\left(\rho-\rho'\right)\right\}=\frac{B}{e^{2kh'}}\frac{1+\dfrac{\omega^2}{kg}}{1-\dfrac{\omega^2}{kg}}\left(\rho-\rho'\right)\left(\frac{\omega^2}{kg}-1\right).$$

На B можно сократить, так как $B\neq 0$, в результате

$$\left(\rho+\rho'\right)\frac{\omega^2}{kg}-\left(\rho-\rho'\right)=-\left(\rho-\rho'\right)\left(\frac{\omega^2}{kg}-1\right)e^{-2kh'}.$$

Получаем дисперсионное соотношение

$$\frac{\omega_1^2}{kg}=1\,,\qquad \omega_1^2=kg\,,$$

$$\omega_2^2=kg\left(\rho-\rho'\right)\left(1-e^{-2kh'}\right)\frac{1}{\left(\rho+\rho'\right)+e^{-2kh'}\left(\rho-\rho'\right)},$$

$$\omega_2^2=kg\frac{1-e^{-2kh'}}{e^{-2kh'}+\dfrac{\left(\rho+\rho'\right)}{\left(\rho-\rho'\right)}}. \tag{56}$$

2. Течение жидкости в диффузоре и конфузоре

В этой главе мы будем исследовать стационарное движение жидкости между двумя плоскими стенками, наклоненными друг к другу под углом α (на рис.7 изображен поперечный разрез обеих плоскостей); истечение происходит вдоль линии пересечения плоскостей.

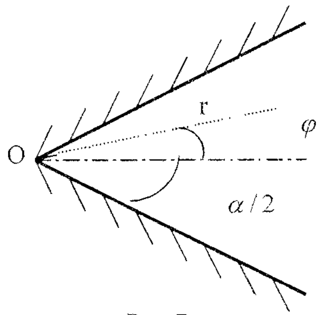


Рис.7

Выбираем цилиндрические координаты r, z, φ с осью вдоль линии пересечения плоскостей (точка O на рис. 7) и углом φ, отсчитываемым указанным на рисунке образом. Движение однородно вдоль оси z, и естественно предположить, что оно будет чисто радиальным, т.е.

$$\mathrm{v}_\varphi = \mathrm{v}_z = 0, \quad \mathrm{v}_r = \mathrm{v}(r,\varphi). \tag{57}$$

Три компоненты уравнения Навье – Стокса в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial t} + (\vec{\mathrm{v}}\nabla)\mathrm{v}_r - \frac{\mathrm{v}_\varphi{}^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta \mathrm{v}_r - \frac{\mathrm{v}_r}{r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial \varphi}\right)\\
&\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial t} + (\vec{\mathrm{v}}\nabla)\mathrm{v}_\varphi - \frac{\mathrm{v}_r \mathrm{v}_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left(\Delta \mathrm{v}_\varphi - \frac{\mathrm{v}_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \varphi}\right)\\
&\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial t} + (\vec{\mathrm{v}}\nabla)\mathrm{v}_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta \mathrm{v}_z,
\end{aligned} \tag{58}$$

причем операторы $(\vec{\mathrm{v}}\nabla)$ и Δ определяются формулами

$$(\vec{\mathrm{v}}\nabla)f = \mathrm{v}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\mathrm{v}_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \mathrm{v}_z\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Уравнения (58) применительно к данной задаче, т.е. с учетом (57), дают

$$\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r} - \frac{\mathrm{v}}{r^2}\right) \tag{59}$$

$$-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2\nu}{r^2}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \varphi} = 0; \tag{60}$$

$$\frac{\partial (r\mathrm{v})}{\partial r} = 0.$$

Из последнего уравнения (уравнения непрерывности) видно, что $r\mathrm{v}$ есть функция только от φ. Введя функцию

$$u(\varphi) = \frac{1}{6\nu} r\mathrm{v}, \tag{61}$$

получаем из (60)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{12\mathrm{v}^2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

откуда, дифференцируя по φ, имеем

$$\frac{p}{\rho} = \frac{12\mathrm{v}^2}{r^2}u(\varphi) + f(r)\,. \qquad (62)$$

Из (61) выражаем $\mathrm{v} = \frac{6\nu}{r}u$ и находим производную скорости по радиальной координате $\mathrm{v}' = -\frac{6\nu}{r^2}u$.

Подставляя эти выражения в (59),

$$-\frac{36\nu^2}{r^3}u^2 = \frac{24\nu^2}{r^3}u - f' + \nu\left(\frac{12\nu}{r^2}u + \frac{1}{r^2}\frac{6\nu}{r}\frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{1}{r}\frac{6\nu}{r^2}u - \frac{6\nu}{r^3}u\right),$$

приводя подобные слагаемые в скобках, получаем

$$-\frac{36\nu^2}{r^3}u^2 = \frac{24\nu^2}{r^3}u - f' + \frac{6\nu^2}{r^3}\cdot\frac{d^2u}{d\varphi^2}\,.$$

Умножим обе части равенства на $\frac{r^3}{6\nu^2}$,

$$-6u^2 = 4u - \frac{r^3}{6\nu^2}f' + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\,.$$

В итоге получаем уравнение

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + 4u + 6u^2 = \frac{1}{6\nu^2}r^3 f'(r),$$

откуда видно, что как левая, так и правая части, зависящие соответственно только от φ и только от r, являются, каждая в отдельности, постоянной величиной, которую мы обозначим как $2C_1$. Таким образом,

$$f'(r) = 12\nu^2 C_1\frac{1}{r^3},$$

откуда, интегрируя, находим

$$f(r) = -\frac{6\nu^2 C_1}{r^2} + const,$$

и окончательно имеем для давления из (62)

$$\frac{p}{\rho} = \frac{6\nu^2}{r^2}(2u - C_1) + const. \tag{63}$$

Для $u(\varphi)$ имеем уравнение

$$u'' + 4u + 6u^2 = 2C_1,$$

которое после умножения на u'

$$u''u' = \frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2, \quad uu' = \frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}(u^2), \quad u'u^2 = \frac{1}{3}\frac{d}{d\varphi}(u^3),$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + 2\frac{d}{d\varphi}(u^2) + 2\frac{d}{d\varphi}(u^3) = C_1\frac{du}{d\varphi}$$

и первого интегрирования, дает

$$\frac{u'^2}{2} + 2u^2 + 2u^3 - 2C_1 u - 2C_2 = 0.$$

Отсюда получаем:

$$2\varphi = \pm\int\frac{du}{\sqrt{-u^3 - u^2 + C_1 u + C_2}} + C_3, \tag{64}$$

чем и определяется искомая зависимость скорости от φ; функция $u(\varphi)$ может быть выражена отсюда посредством эллиптических функций. Три постоянных C_1, C_2, C_3 определяются из граничных условий на стенках

$$u\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \tag{65}$$

и из условия, что через любое сечение $r = const$ проходит (в 1 секунду) одинаковое количество жидкости Q,

$$Q = \rho \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} v r d\varphi = 6\nu\rho \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} u d\varphi. \tag{66}$$

Заметим, что величина $\dfrac{|Q|}{\nu\rho}$ играет роль числа Рейнольдса. Рассмотрим диффузор, т.е. $Q > 0$. Сделаем предположение, что движение симметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ и что $u(\varphi)$ (теперь $u > 0$) монотонно меняется от нуля при $\varphi = \pm\alpha/2$ до $u = u_0 > 0$ при $\varphi = 0$. Теперь

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(u_0 - u)\left[u^2 + (1 + u_0)u + q\right]}}, \\ \frac{\mathrm{Re}}{6} &= \int_0^{u_0} \frac{u du}{\sqrt{(u_0 - u)\left[u^2 + (1 + u_0)u + q\right]}}. \end{aligned} \tag{67}$$

Исследуем случай, когда полином, стоящий в подкоренном выражении, имеет один вещественный корень – u_0. Обозначим $P = (u_0 - u)\left[u^2 + (1 + u_0)u + q\right]$, тогда $\sqrt{P} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{du}{d\varphi}$, таким образом в точке u_0 функция $u(\varphi)$ имеет экстремум и только в этой точке, так как u' обращается в нуль, если $P = 0$, т.е. корень только один, значит, и экстремум только один и профиль скорости выглядит следующим образом:

$$\alpha = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(u_0 - u)\left[u^2 + (1 + u_0)u + q\right]}}.$$

Если рассматривать u_0 как заданное, то α монотонно возрастает с уменьшением q и имеет наибольшее возможное значение при $q = 0$:

$$\alpha_{\max} = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u(u_0 - u)(u - u_0 - 1)}}.$$

С другой стороны, при заданном q α есть монотонно убывающая функция от u_0. Отсюда следует, что u_0 как функция от q при заданном α есть монотонно убывающая функция, так что ее наибольшее значение соответствует $q = 0$ и определяется написанным равенством. Наибольшему u_0 соответствует также и наибольшее $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\max}$. С помощью подстановки

$$k^2 = \frac{u_0}{1 + 2u_0}, \qquad u = u_0 \cos^2 x$$

получаем зависимость $\mathrm{Re}_{\max}$ от α в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\sqrt{1-2k^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}, \\ \mathrm{Re}_{\max} &= -6a\frac{1-k^2}{1-2k^2} + \frac{12}{\sqrt{1-2k^2}}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx. \end{aligned} \tag{68}$$

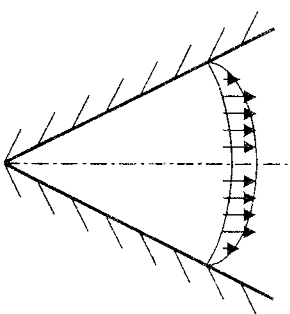


Рис.8

Таким образом, симметричное, везде расходящееся течение в диффузоре (рис.8) возможно для данного угла раствора только при числах Рейнольдса, не превышающих определенного предела. При $\alpha \to \pi$ (чему соответствует $k \to 0$) $\mathrm{Re}_{\max}$ стремится к нулю. При $\alpha \to \pi$ (чему соответствует $k \to 1/\sqrt{2}$) $\mathrm{Re}_{\max}$ стремится к бесконечности по закону $R_{\max} = 18.8/\alpha$.

При $R > R_{\max}$ предположение о симметричном, везде расходящемся течении в диффузоре незаконно, так как условия не могут быть выполнены. В интервале углов $-\alpha/2 \le \varphi \le \alpha/2$ функция $u(\varphi)$ должна иметь несколько максимумов или минимумов. Соответствующие этим экстремумам значения $u(\varphi)$ должны по-прежнему быть корнями стоящего под корнем многочлена. Поэтому ясно, что трехчлен $u^2 + (1+u_0)u + q$ (с $u_0 > 0$, $q > 0$) должен иметь в этой области два вещественных отрицательных корня, так что стоящее под корнем выражение может

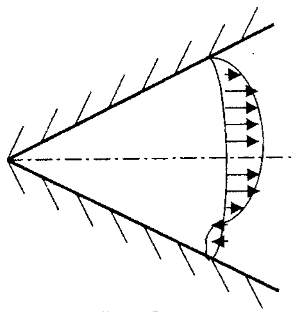


Рис.9

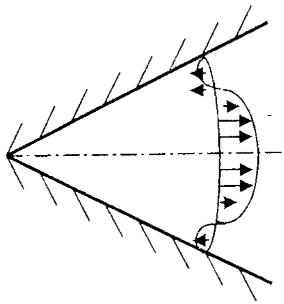


Рис.10

быть написано в виде

$$(u_0 - u)(u_0' + u)(u_0'' + u),$$

где $u_0 > 0$, $u_0' > 0$, $u_0'' > 0$; пусть $u_0' < u_0''$. Функция $u(\varphi)$ может, очевидно, изменяться в интервале $u_0' \geq u \geq -u_0'$, причем $u = u_0$ соответствует положительному максимуму $u(\varphi)$, а $u = -u_0'$ – отрицательному минимуму. Не останавливаясь подробнее на исследовании получающихся таким образом решений, укажем, что при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\max}$ возникает сначала решение, при котором скорость имеет один максимум и один минимум, причем движение асимметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ (рис.9). При дальнейшем увеличении Re возникает симметричное решение с одним максимумом и двумя минимумами скорости (рис.10) и т.д. Во всех этих решениях имеются, следовательно, наряду с областями вытекающей жидкости, также и области втекающих потоков (но, конечно, так, что полный расход жидкости $Q > 0$). При $\mathrm{Re} \to \infty$ число чередующихся минимумов и максимумов неограниченно возрастает, так что никакого определенного предельного решения не существует. Подчеркнем, что при диффузорном течении решение не стремится, таким образом, при $\mathrm{Re} \to \infty$ к решению уравнения Эйлера, как это имеет место при конфузорном движении.

Наконец, отметим, что при увеличении Re стационарное диффузорное движение описанного типа вскоре после достижения $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\max}$ делается неустойчивым и возникает турбулентность.

3. Поверхностные явления. Формула Лапласа

Рассмотрим явления, происходящие вблизи поверхности раздела.

Если поверхность раздела двух сред искривлена, то вблизи нее давления в обеих средах различны. Для определения этой разности давлений (называемой *поверхностным давлением*) напишем условие термодинамического равновесия двух сред с учетом свойств поверхности их раздела.

Пусть поверхность раздела подвергается бесконечно малому смещению. В каждой точке несмещенной поверхности проведем нормаль к ней. Отрезок нормали, заключенный между ее пересечениями с несмещенной и смещенной поверхностями, обозначим $\delta\zeta$. Тогда объем каждого элемента пространства, заключенного между поверхностями, есть $\delta\zeta df$, где df – элемент поверхности. Пусть p_1 и p_2 – давления в первой и второй средах. Будем считать $\delta\zeta$ положительным, если смещение поверхности раздела производится, скажем, в сторону второй среды. Тогда работа, которую надо произвести для описанного изменения объема, равна

$$\int(-p_1 + p_2)\delta\zeta df .$$

Полная работа δR смещения поверхности находится путем прибавления к этому выражению работы, связанной с изменением площади самой этой поверхности. Эта часть работы пропорциональна, как известно, изменению δf площади поверхности и равна $\alpha\delta f$, где α – *поверхностное натяжение*. Таким образом, полная работа равна

$$\delta R = -\int\left(p_1 - p_2\right)\delta\zeta df + \alpha\delta f. \qquad (69)$$

Условие термодинамического равновесия определяется, как известно, обращением δR в нуль.

Пусть далее R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны[1] в данной точке

---

[1] Напомним некоторые сведения из геометрии. Исследование отклонения поверхности от плоскости может быть проведено следующим образом. Через нормаль в данной точке M поверхности проводят всевозможные плоскости. Сечения поверхности этими плоскостями называют нормальными сечениями, а кривизны нормальных сечений в точке M, т.е. обратные радиусы окружностей, наиболее близких к нормальным сечениям, - нормальными

См. след. страницу

поверхности; мы будем считать R_1 и R_2 положительными, если они направлены внутрь первой среды. Тогда элементы длины dl_1 и dl_2 на поверхности, проведенные в плоскостях ее главных сечений, получают при бесконечно малом смещении поверхности приращения, равные соответственно $\frac{\delta\zeta}{R_1}dl_1$ и $\frac{\delta\zeta}{R_2}dl_2$ (dl_1 и dl_2 надо рассматривать как элементы дуги окружностей с радиусами R_1 и R_2). Поэтому элемент поверхности $df = dl_1 dl_2$ будет равен после смещения

$$dl_1\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_1}\right)dl_2\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_2}\right) \approx dl_1 dl_2\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_1}+\frac{\delta\zeta}{R_2}\right),$$

т.е. изменится на величину

$$\delta\zeta df\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Отсюда видно, что полное изменение площади поверхности раздела есть

$$\delta f = \int \delta\zeta\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)df\,. \tag{70}$$

Подставляя полученные выражения в (69) и приравнивая δR нулю, получим условие равновесия в виде

$$\int \delta\zeta\left\{(p_1-p_2)-\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right\}df = 0\,.$$

Это условие должно выполняться при произвольном бесконечно малом смещении поверхности, т. е. при произвольном $\delta\zeta$. Поэтому необходимо, чтобы стоящее под интегралом в скобках выражение тождественно обращалось в нуль, т.е.

кривизнами поверхности в этой точке. Максимальная и минимальная из нормальных кривизн в данной точке M именуются главными кривизнами. Величину $K=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ называют удвоенной средней кривизной поверхности в точке М. Мы в дальнейшем будем называть эту величину просто кривизной.

$$p_1 - p_2 = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (71)$$

Это и есть формула (*формула Лапласа*), определяющая поверхностное давление. Мы видим, что если R_1 и R_2 положительны, то $p_1 > p_2$. Это значит, что давление больше в той среде, граница которой выпукла. Если $R_1 = R_2 = \infty$, т.е. поверхность раздела плоская, то давления в обеих средах, как и должно было быть, одинаковы.

В практических вычислениях удобно пользоваться формулой для кривизны, не содержащей радиусов кривизны. Выведем эту формулу. Приращение поверхности δf можно записать как поверхностный интеграл

$$\delta f = \oint \vec{n} \cdot d\vec{S} \qquad (72)$$

(рис. 11).

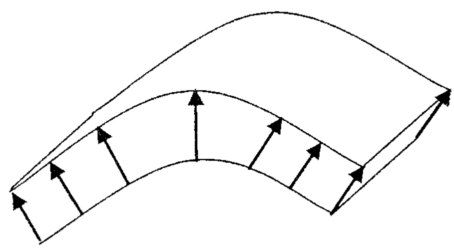


Рис.11

Преобразуя интеграл в (72) по теореме Гаусса к интегралу по объему, заключенному между новым и старым положениями поверхности, получаем $\delta f = \int \operatorname{div} \vec{n}\, dV$. Сравнивая с (70), заключаем, что $K = \operatorname{div} \vec{n}$. Если поверхность задана уравнением $F(\vec{r}) = 0$, то вектор нормали может быть записан в виде $\vec{n} = \dfrac{\nabla F}{|\nabla F|}$.

Приведем для справок формулы для некоторых способов задания поверхности.

Декартовы координаты. Пусть поверхность задана уравнением $z = \zeta(x,y)$, т.е. $F = z - \zeta(x,y)$. Тогда

$$\nabla F = \nabla z - \nabla\zeta = \vec{e}_z - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\vec{e}_y$$

$$|\nabla F| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2}$$

$$K = \operatorname{div}\frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\Delta F}{|\nabla F|} - \frac{\nabla F\cdot\nabla|\nabla F|}{(\nabla F)^2}. \tag{73}$$

Формула (73) сильно упрощается, если ζ зависит лишь от одной пространственной координаты, например, от x. Тогда

$$K = -\frac{\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right)^{3/2}}. \tag{74}$$

Другой случай упрощения – слабо искривленная поверхность, тогда из (73) получаем

$$K = -\Delta\zeta, \tag{75}$$

причем погрешность этой формулы имеет третий порядок по отклонению поверхности от плоскости.

Сферические координаты. Пусть поверхность задана уравнением $r = \zeta(\vartheta,\varphi)$. Тогда

$$\nabla F = \vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$|\nabla F| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\right)^2} \tag{76}$$

$$K = \operatorname{div}\frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\Delta F}{|\nabla F|} - \frac{\nabla F\cdot\nabla|\nabla F|}{(\nabla F)^2}.$$

Формула (76) упрощается в осесимметричном случае, когда $\zeta = \zeta(\vartheta)$

$$K = \frac{2r^2 + 3\zeta'^2 - r\zeta'' - r\zeta' \operatorname{ctg}\vartheta - r^{-1}\zeta'^3 \operatorname{ctg}\vartheta}{\left(r^2 + \zeta'^2\right)^{3/2}}, \tag{77}$$

где $\zeta' = \dfrac{\partial \zeta}{\partial \vartheta}$. Для малых искажений сферы единичного радиуса получаем из (77)

$$\begin{gathered} K = 2 - 2\zeta - \zeta'' - \zeta' \operatorname{ctg}\vartheta + 2\zeta^2 + 2\zeta\zeta'' + 2\zeta\zeta' \operatorname{ctg}\vartheta + \\ + \frac{3}{2}\zeta'^2\zeta'' - 2\zeta^3 - 3\zeta^2\zeta'' + \frac{1}{2}\zeta'^3 \operatorname{ctg}\vartheta - 3\zeta^2\zeta' \operatorname{ctg}\vartheta, \end{gathered} \tag{78}$$

где теперь ζ - возмущение поверхности и удержаны члены до третьего порядка включительно.

<u>Цилиндрические координаты</u>. Пусть поверхность задана уравнением $r = \zeta(z, \varphi)$. Тогда

$$\begin{gathered} \nabla F = \vec{e}_r - \frac{\partial \zeta}{\partial z}\vec{e}_z - \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\ |\nabla F| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)^2} \\ K = \operatorname{div}\frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\Delta F}{|\nabla F|} - \frac{\nabla F \cdot \nabla |\nabla F|}{(\nabla F)^2} \end{gathered} \tag{79}$$

для малых искажений поверхности кругового цилиндра единичного радиуса имеем из (79)

$$K = 1 - \zeta - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 + \zeta^2 + 2\zeta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \ldots \tag{80}$$

Применим формулу (71) для исследования механического равновесия соприкасающихся сред. Предположим, что ни на поверхность раздела, ни на сами среды не действуют никакие внешние силы. Тогда вдоль границы каждой среды давление постоянно. Поэтому, имея в виду формулу (71), мы можем написать условие равновесия в виде

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const.} \tag{81}$$

Таким образом, сумма обратных радиусов кривизны должна быть постоянной вдоль всей свободной поверхности раздела. Если вся поверхность свободна, то условие (81) означает, что поверхность должна иметь шарообразную форму (например, поверхность маленькой капли, влиянием силы тяжести на которую можно пренебречь). Если же поверхность закреплена вдоль какой- нибудь линии (например, у жидкой пленки на твердой рамке), то ее форма является более сложной.

При равновесии тонких пленок жидкости, закрепленных на твердой рамке, в условии (81) справа должен стоять нуль. Действительно, сумма $1/R_1+1/R_2$ должна быть одинаковой вдоль всей свободной поверхности пленки и в то же время на двух своих сторонах она должна иметь противоположный знак, поскольку если одна сторона выпукла, то другая – вогнута, при этом радиусы кривизны те же, однако они должны считаться теперь отрицательными. Отсюда следует, что условие равновесия тонкой пленки есть

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0. \tag{82}$$

Рассмотрим теперь условие равновесия на границе среды, находящейся в поле тяжести. Предположим для простоты, что второй средой является просто атмосфера, давление которой на протяжении размеров всей среды можно считать постоянным. В качестве первой среды рассмотрим несжимаемую жидкость. Тогда имеем $p_2=const$, а давление p_1 в жидкости равно $p_1=const-\rho g z$ (координата z отсчитывается вертикально вверх).

Таким образом, условие равновесия приобретает вид

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{g\rho}{\alpha}z=\mathrm{const}\,. \tag{83}$$

Следует, впрочем, заметить, что для определения равновесной формы поверхности жидкости в конкретных случаях обычно удобно пользоваться условием равновесия не в виде (83), а непосредственно решая вариационную задачу о минимуме полной свободной энергии. Значения внутренней свободной энергии жидкости зависят только от объема, а не от формы поверхности. От формы зависят, во-первых, значения поверхностной свободной энергии

$$\int \alpha df$$

и, во-вторых, значение энергии во внешнем поле (поле тяжести):

$$g\rho \int zdV\ .$$

Таким образом, условие равновесия можно написать в виде

$$\alpha \int df + g\rho \int zdV = \min. \tag{84}$$

Определение минимума должно производиться при дополнительном условии

$$\int dV = \mathrm{const}\,, \tag{85}$$

выражающем неизменность полного объема жидкости.

Постоянные α, ρ, g входят в условия равновесия (83) и (84) только в виде отношения $\dfrac{\alpha}{g\rho}$. Это отношение имеет размерность квадрата длины. Длину

$$a = \sqrt{\frac{2\alpha}{g\rho}} \tag{86}$$

называют *капиллярной постоянной.* Форма поверхности жидкости определяется только этой величиной. Если капиллярная постоянная велика (по сравнению с размерами тела), то при определении формы поверхности можно пренебречь полем тяжести.

Это и есть искомая формула, определяющая сумму обратных радиусов кривизны слабоизогнутой поверхности.

При равновесии трех соприкасающихся друг с другом сред их поверхности раздела устанавливаются таким образом, чтобы была равна нулю равнодействующая трех сил поверхностного натяжения, действующих на общую линию соприкосновения трех сред. При этом условии поверхности раздела должны пересекаться друг с другом под углами (так называемые краевые углы), определяемыми значениями поверхностного натяжения.

Наконец, рассмотрим граничные условия, которые должны соблюдаться на границе двух движущихся жидкостей при действии сил поверхностного натяжения. Если поверхностное натяжение не учитывается, то на границе двух жидкостей имеем

$$n_k\left(\sigma_{ik}^{(2)}-\sigma_{ik}^{(1)}\right)=0\,,$$

что означает равенство сил трения, действующих на поверхности двух жидкостей. При учете поверхностного натяжения нужно добавить в правую часть этого условия дополнительную силу, определяемую по формуле Лапласа и направленную по нормали к поверхности:

$$n_k\sigma_{ik}^{(2)}-n_k\sigma_{ik}^{(1)}=\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)n_i\,. \tag{87}$$

Иначе можно написать это уравнение в виде

$$(p_1-p_2)n_i=(\sigma'^{(1)}_{ik}-\sigma'^{(2)}_{ik})n_k+\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)n_i\,. \tag{88}$$

Если обе жидкости можно считать идеальными, то вязкие напряжения σ'_{ik} исчезают и мы получаем вновь простое уравнение (71).

Условие (88), однако, еще не является самым общим. Дело в том, что коэффициент поверхностного натяжения α может оказаться непостоянным вдоль поверхности (например, в результате непостоянства температуры). Тогда наряду с нормальной силой (исчезающей для плоской поверхности) появляется некоторая дополнительная сила, направленная тангенциально к поверхности. Аналогично тому, как при неравномерном давлении появляется объемная сила, равная (на единицу объема) $-\nabla p$, здесь имеем для тангенциальной силы $f_\tau=\nabla\alpha$. Мы пишем в этом случае градиент со знаком плюс, а не со знаком минус, как в силе $-\nabla p$, в связи с тем, что силы поверхностного натяжения стремятся уменьшить площадь поверхности, в то время как силы давления стремятся увеличить объем. Прибавляя эту силу к правой части равенства (88), получим граничное условие

$$\left[p_1-p_2-\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]n_i=(\sigma'^{(1)}_{ik}-\sigma'^{(2)}_{ik})n_k+\frac{\partial\alpha}{\partial x_i} \tag{89}$$

(единичный вектор нормали $\vec{n}$ направлен внутрь первой жидкости). Отметим, что это условие может быть выполнено только для вязкой жидкости. Действительно, для невязкой жидкости $\sigma'_{ik}=0$; тогда левая часть равенства (89) будет представлять собой вектор, направленный по нормали, а правая – вектор, направленный по касательной к поверхности. Но такое равенство невозможно (за исключением, разумеется, тривиального случая, когда каждая из этих величин равна нулю).

4. Капиллярные волны

Поверхность жидкости стремится принять свою равновесную форму под влиянием не только действующего на жидкость поля тяжести, но и сил поверхностного натяжения. Мы увидим, что влияние капиллярности на гравитационные волны существенно при малых длинах волн.

Будем предполагать амплитуду колебаний малой по сравнению с длиной волны. Для потенциала скорости имеем уравнение

$$\Delta\varphi = 0\,.$$

Условие на поверхности жидкости будет таким: разность давлений с обеих сторон этой поверхности должна определяться формулой Лапласа.

Обозначим z -координату точек поверхности жидкости как ζ .

Поскольку ζ мало, то можно воспользоваться выражением $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)$ и записать формулу Лапласа в виде

$$p - p_0 = -\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right).$$

Здесь p – давление в жидкости вблизи поверхности, p_0 – постоянное внешнее давление. Подставляя в это выражение p в виде $p=-\rho g z-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ (интеграл Коши-Лагранжа), находим

$$\rho g\zeta + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0\,. \tag{90}$$

Постоянная p_0 устранена переопределением потенциала φ (прибавлением к нему независящей от координат величины $p_0 t / \rho$).

Малость амплитуды колебаний в волне означает, что смещение ζ мало. Поэтому можно считать в том же приближении, что вертикальная компонента скорости движения точек поверхности совпадает с производной по времени от смещения ζ : $\mathrm{v}_z = \partial\zeta / \partial t$. Но $\mathrm{v}_z = \partial\varphi / \partial z$, так что имеем кинематическое условие в виде

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}. \qquad (91)$$

В силу малости ζ граничные условия (90), (91) можно записывать не при $z = \zeta$, а при $z = 0$. Продифференцировав соотношение (90) по времени и заменив в нем $\partial\zeta / \partial t$ на $\partial\varphi / \partial z$ в соответствии с (91), получим граничное условие для потенциала φ в виде

$$\left\{\rho g \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right\}_{z=0} = 0. \qquad (92)$$

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x и однородную вдоль оси y ; в такой волне все величины не зависят от координаты y . Будем искать решение, являющееся простой периодической функцией времени и координаты x :

$$\varphi = \cos(kx - \omega t) f(z),$$

где ω – циклическая частота (мы будем говорить о ней просто как о частоте), k – волновое число, $\lambda = 2\pi / k$ – длина волны. Подставив это выражение в уравнение $\Delta\varphi = 0$, получим для функции $f(z)$ уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0.$$

Его решение, затухающее в глубь жидкости (т.е. при $z \to -\infty$), имеет вид

$$\varphi = A e^{kz} \cos(kx - \omega t).$$

Связь между k и ω определяется теперь из предельного условия (92) и имеет вид

$$\omega^2 = gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3. \qquad (93)$$

Мы видим, что при больших длинах волн, удовлетворяющих условию $k \ll (g\rho / \alpha)^{1/2}$ или $ka \ll 1$ (a - капиллярная постоянная), влиянием капиллярности можно пренебречь, волна является чисто гравитационной.

Для коротких волн можно пренебречь влиянием поля тяжести. Тогда

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho} k^3 . \tag{94}$$

Такие волны называют капиллярными; в промежуточном случае говорят о капиллярно-гравитационных волнах.

Соотношение (94) представляет собой дисперсионное соотношение. График его приведен на рис. 12.

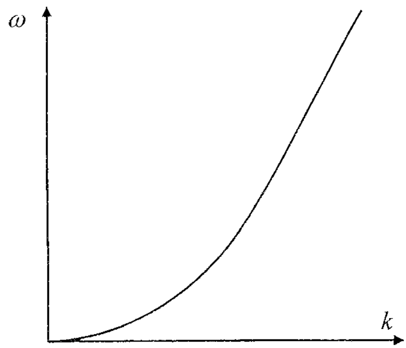


Рис.12

Как видно, связь между ω и k нелинейна. Это означает, что фазовая скорость волн зависит от частоты

$$u = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho} k} = \left(\frac{\omega \alpha}{\rho} \right)^{1/3} . \tag{95}$$

Высокочастотные короткие волны бегут быстро, а низкочастотные длинные волны распространяются медленно. Отсюда следует, что только монохроматические волны распространяются без изменения своей формы, а все прочие волны постепенно меняют свой вид. Как известно, если волна близка к монохроматической, то можно говорить о скорости распространения возмущений огибающей волны, которая дается выражением

$$\mathrm{v} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2}\left(\frac{\omega\alpha}{\rho}\right)^{1/3} . \tag{96}$$

Для капиллярных волн групповая скорость оказывается в полтора раза больше фазовой.

5. Собственные колебания сферической капли

Из всех поверхностей, ограничивающих заданный объем, сфера имеет наименьшую площадь и, следовательно, капля, форма которой отличается от сферической, обладает избыточной энергией. В отсутствие внешних сил такая капля не может быть стационарной, ее форма неизбежно будет меняться, а избыточная энергия при деформировании будет переходить в кинетическую и рассеиваться в виде тепла. Если вязкость жидкости мала, то рассеивается малая доля энергии, следовательно, будут наблюдаться колебания формы капли.

Рассмотрим собственные колебания сферической капли несжимаемой идеальной жидкости, совершаемые ею под действием капиллярных сил. При колебаниях происходит отклонение формы поверхности капли от сферической. Амплитуду колебаний будем считать малой.

Воспользуемся формулой Лапласа

$$p - p_0 = \alpha K , \tag{97}$$

где p_0 - внешнее давление, которое примем за начало отсчета, K – кривизна поверхности капли, p – давление жидкости вблизи поверхности

$$p = -\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} . \tag{98}$$

Здесь ψ – потенциал скорости, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$.

Вычислим кривизну поверхности почти сферической капли в сферических координатах. Поверхность будем описывать уравнением

$r = R + \xi(\Theta, \varphi)$, где R — радиус невозмущенной капли, Θ, φ – полярный и азимутальный углы сферической системы координат. Воспользуемся формулой (76), которая для малых несферичностей сильно упрощается

$$K = \Delta F = \Delta\left(r - R - \xi\right) = \frac{2}{r} - \Delta\xi = \frac{2}{R} - 2\frac{\xi}{R^2} - \frac{1}{R^2}\Lambda\xi\,, \qquad (99)$$

где все равенства выписаны с точностью до линейных членов включительно, а Λ – угловая часть оператора Лапласа

$$\Lambda = \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial}{\partial\Theta}\right). \qquad (100)$$

Подставляя (98) в (97), имеем

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha K = 0\,. \qquad (101)$$

Дифференцируя (101) по времени и используя кинематическое условие

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \mathrm{v}_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}\,,$$

находим окончательное условие для ψ в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{\alpha}{R^2}\left(2\frac{\partial\psi}{\partial r} + \Lambda\frac{\partial\psi}{\partial r}\right). \qquad (102)$$

Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка относительно ψ. Будем искать решение в виде стоячей волны

$$\psi = e^{-i\omega t} f\left(r,\ \Theta,\ \varphi\right),$$

где функция f удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta f = 0$. Как известно, всякое решение уравнения Лапласа может быть представлено в виде линейной комбинации объемных шаровых функций вида

$$r^l Y_{lm}\left(\Theta,\ \varphi\right),$$

где $Y_{lm}\left(\Theta,\ \varphi\right)$ – сферические функции, равные

$$Y_{lm}\left(\Theta,\ \varphi\right) = P_l^m\left(\cos\Theta\right)e^{im\varphi}.$$

Здесь $P_l^m\left(\cos\Theta\right)$ – присоединенные функции Лежандра. Как известно, l пробегает все целые положительные значения, включая нуль, а m пробегает при заданном l значения $m = 0,\ \pm1,\ \pm2\ldots,\ \pm l$.

Соответственно этому ищем частное решение поставленной задачи в виде

$$\psi = Ae^{-i\omega t}r^l P_l^m\left(\cos\Theta\right)e^{im\varphi}. \qquad (103)$$

Подставляя решение (103) в уравнение (102), получаем (сокращая общий множитель $Ae^{-i\omega t}R^l$):

$$-\rho\omega^2 Y_{lm} - \frac{\alpha\ l}{R^3}\left(2Y_{lm} + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi^2}\right) = 0\ .(104)$$

Воспользовавшись тем, что шаровые функции Y_{lm} удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{1}{\sin\Theta}\ \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\ \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y_{lm}\right) = 0,$$

находим (сокращая общий множитель Y_{lm})

$$\rho\omega^2 + \frac{\alpha l}{R^3}\left(2 - l(l+1)\right) = 0, \qquad (105)$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho R^3}l(l-1)(l+2). \qquad (106)$$

Формула (106) служит для определения частот собственных капиллярных колебаний сферической капли. Видим, что они зависят только от числа l, но не от m. Между тем данному l соответствует 2l+1 различных функций (105). Таким образом, каждая из частот (106) соответствует 2l+1 различным собственным колебаниям. О независимых собственных колебаниях, имеющих одинаковые частоты, говорят как о вырожденных; в данном случае имеет место 2l+1-кратное вырождение.

Выражение (106) обращается в нуль при l=0 и при l=1. Значение l=0 соответствовало бы радиальным колебаниям; в несжимаемой жидкости такие колебания, очевидно, невозможны. При l=1 движение представляло бы собой поступательное перемещение капли как целого. Наименьшая возможная частота колебаний капли соответствует l=2 и равна

$$\omega_{\min}^2 = \frac{8\alpha}{\rho R^3}.$$

6. Задача Релея о неустойчивости столба жидкости

Как мы видели, поверхностное натяжение может приводить к появлению у системы упругих свойств. Так бывает в тех случаях, когда в основном состоянии энергия системы минимальна. В случае волн на плоской поверхности жидкости любое малое отклонение поверхности от плоскости увеличивает площадь поверхности. Аналогично обстоит дело в случае колебаний почти сферической капли. Но бывают ситуации, когда хотя бы некоторые отклонения от основного состояния приводят к уменьшению энергии. В таких случаях основное состояние будет неустойчиво. В этом параграфе мы рассмотрим пример системы, обладающей неустойчивым равновесием.

Рассмотрим столб жидкости радиусом a и плотностью ρ.

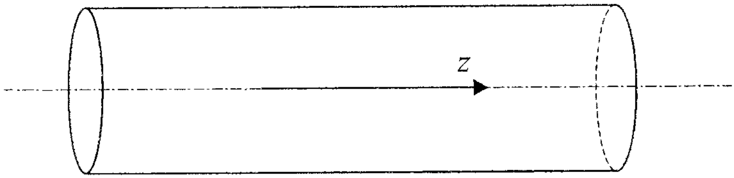


Рис.13

Сравним энергии состояния с идеальной цилиндрической поверхностью и состояния с возмущенной поверхностью. Конечно, для бесконечно длинного цилиндра и энергия будет бесконечной, но этой трудности можно легко избежать, рассматривая энергию, приходящуюся на единицу длины цилиндра.

Пусть поверхность столба задана соотношением

$$r = a + \zeta(z), \tag{107}$$

тогда площадь поверхности дается интегралом

$$S = 2\pi \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2} \, (a + \zeta) \, dz \, . \qquad (108)$$

При малых ζ упростим это выражение, ограничившись членами второго порядка малости

$$S = 2\pi \int \left(a + \zeta + \frac{a}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right) dz \, . \qquad (109)$$

Учтем, что возможны лишь такие ζ, которые не меняют объем системы

$$V = \pi \int (a + \zeta)^2 \, dz = \pi \int a^2 dz \, , \qquad (110)$$

откуда

$$\int \zeta dz = -\frac{1}{2a} \int \zeta^2 dz \, . \qquad (111)$$

Это дает возможность переписать (109) в виде

$$S = \pi a \int \left(\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 - \frac{\zeta^2}{a^2} \right) dz \qquad (112)$$

(несущественная постоянная отброшена).

Рассмотрим поведение (112) для периодических возмущений поверхности, имеющих вид

$$\zeta = \zeta_0 \sin kz \, . \qquad (113)$$

Подставляя (113) в (112), получаем

$$S = \frac{\pi}{2a} \left(k^2 a^2 - 1 \right) \zeta_0^2 \, . \qquad (114)$$

Здесь учтено, что среднее значение квадратов синуса и косинуса равно 1/2.

Из (114) видно, что коротковолновые возмущения увеличивают площадь поверхности и, следовательно, энергетически невыгодны. В то же время длинноволновые возмущения будут уменьшать площадь поверхности, а значит, и энергию системы, поэтому можно ожидать неустойчивости состояния с цилиндрической поверхностью относительно возмущений с $k < 1/a$, т.е. с длиной волны l, большей периметра поперечного сечения цилиндра,

$$l = \frac{2\pi}{k} > 2\pi a\ . \tag{115}$$

Чтобы убедиться в этом, решим гидродинамическую задачу о поведении малых возмущений основного состояния.

Течение жидкости будем считать безвихревым, так что скорость можно представить в виде $\vec{v} = \nabla\varphi$, где φ — потенциал. Как и в предыдущих параграфах, условие несжимаемости жидкости $\mathrm{div}\vec{v} = 0$ в терминах потенциала принимает вид $\mathrm{div}\nabla\varphi = 0$, т.е. $\Delta\varphi = 0$.

Формула для кривизны поверхности в цилиндрических координатах была выведена в первом параграфе. Ограничимся анализом осесимметричных возмущений. Тогда получим из (80) для малых возмущений в линейном приближении

$$K = \Delta F = \frac{1}{r} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} = \frac{1}{a(1+\zeta/a)} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} =$$
$$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\zeta}{a}\right) - \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} = \frac{1}{a} - \frac{\zeta}{a^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}.$$

Подставляя это выражение в динамическое условие

$$p_0 - p = -\alpha K, \tag{116}$$

где p_0 – давление снаружи, p – давление в жидкости, α – коэффициент поверхностного натяжения, получим

$$p_0 - p = -\alpha\left(\frac{1}{a} - \frac{\zeta}{a^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right).$$

Запишем кинематическое условие

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}. \tag{117}$$

Исключая давление с помощью интеграла Коши-Лагранжа

$$p = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

рассматривая нормальные возмущения, зависящие от времени и продольной координаты по закону $e^{\lambda t} \cdot e^{ikz}$, и учитывая, что в равновесии

$$p_0 = -\frac{\alpha}{a},$$

перепишем динамическое и кинематическое условия

$$\rho\lambda\varphi = \frac{\alpha}{a^2}\left(1 - a^2k^2\right)\zeta,$$

$$\lambda\zeta = \frac{\partial\varphi}{\partial r}. \qquad (118)$$

Поскольку $\Delta\varphi = 0$, то

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = k^2\varphi.$$

Мы получили уравнение Бесселя нулевого индекса. Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = cI_0(kr),$$

где I_0 – функция Бесселя мнимого аргумента.

Подставляя это решение в динамическое и кинематическое условия (118), получаем систему алгебраических уравнений относительно c, ζ

$$\rho\lambda cI_0(ka) = \alpha\left(\frac{1}{a^2} - k^2\right)\zeta,$$

$$\lambda\zeta = ckI_1(ka).$$

Условием разрешимости системы является равенство нулю её определителя

$$\begin{vmatrix} -\alpha\left(\dfrac{1}{a^2} - k^2\right) & \rho\lambda I_0(ka) \\ \lambda & -kI_1(ka) \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим инкремент возмущений

$$\lambda^2 = \alpha k \frac{1 - a^2 k^2}{\rho a^2} \cdot \frac{I_1}{I_0}. \qquad (119)$$

Знак выражения в правой части зависит от знака числителя: если $ka > 1$, то $\lambda^2 < 0$, т.е. инкремент чисто мнимый, что означает устойчивость. Если же $ka < 1$, то $\lambda^2 > 0$, один из корней будет положительным, что соответствует нарастающим возмущениям. Таким образом, критерий устойчивости совпадает с тем, который был получен из энергетических соображений (формула (115)). Но мы получили и дополнительную информацию. Из формулы (119) видно, что скорость роста возмущений зависит от волнового числа. Естественно посмотреть, для каких возмущений скорость роста максимальна. Для этого введем безразмерное волновое число $x = ak$ и рассмотрим функцию

$$f = x\left(1 - x^2\right)\frac{I_1(x)}{I_0(x)}, \qquad (120)$$

тогда формула (119) принимает вид

$$\lambda^2 = \alpha \frac{f}{\rho a^3}. \qquad (121)$$

График функции f имеет вид, изображенный на рис. 14.

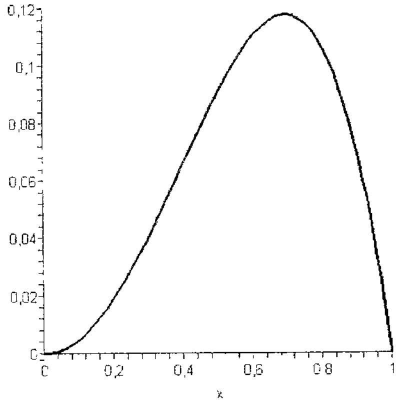


Рис.14

Максимум этой функции лежит примерно при $x = 0.697$. Это означает, что длина волны наиболее опасных возмущений $l = \dfrac{2\pi a}{x} \approx 9a$.

К чему может привести развитие неустойчивости? Линейная теория не дает ответа на этот вопрос. Вообще говоря, можно ожидать либо распада столба на отдельные капли, либо перехода к устойчивому состоянию с гофрированной поверхностью. Исследуем условия распада столба жидкости на капли, используя анализ энергии. Вычислим энергию поверхности

$$E = 2\pi a L\alpha,$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения, L – длина столба, a – радиус столба.

Рассмотрим разбиение столба на n капель. Разбиение на капли выгодно, если $E_{кап} < E$. Объём сферической капли $V_0 = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Объём столба жидкости $V = \pi a^2 L = nV_0$.

$$V_0 = \frac{\pi a^2 L}{n}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{3a^2 L}{4n}}.$$

Площадь поверхности n капель $S = n4\pi r^2$.

Подставим в эту формулу выражение для r:

$$S = n4\pi\left(\frac{3}{4}\frac{a^2 L}{n}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$E_{кап} = S\alpha,$$

$$E_{кап} = n4\pi\left(\frac{3}{4}\frac{a^2 L}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\alpha.$$

Для того, чтобы произошло разбиение на капли, нужно, чтобы $E_{кап} < E_{столба}$:

$$4\pi n\alpha\left(\frac{3}{4}\frac{a^2 L}{n}\right)^{\frac{2}{3}} < 2\pi a L\alpha.$$

Возведём обе части неравенства в куб

$$(2n)^3 \left(\frac{3}{4}\frac{a^2 L}{n}\right)^2 < (aL)^3 ,$$

$$\frac{9}{2} n a^4 L^2 < a^3 L^3 ,$$

$$\frac{9}{2} n a < L . \qquad (122)$$

Это условие удобно переписать в терминах длины волны $l = L / n$

$$l > \frac{9}{2} a.$$

Разбиение на капли тем выгоднее, чем больше длина капель. Если длина волны велика, то энергия системы уменьшается. И наоборот.

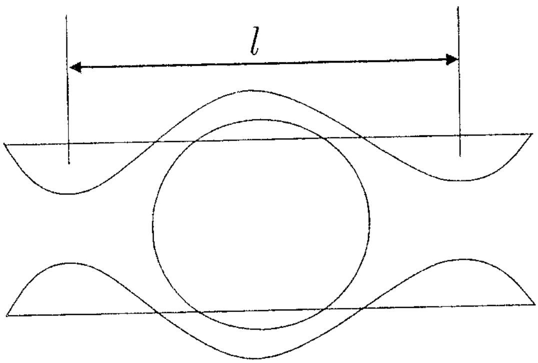


Рис.15

7. Неустойчивость Релея–Тейлора

Рассмотрим двухслойную систему, состоящую из двух слоев идеальной жидкости один поверх другого с плоской границей раздела. В общем случае плотности жидкостей различны. Возмущения, возникающие в системе, могут деформировать границу раздела. В ситуации, когда верхняя жидкость тяжелее, чем нижняя, т.е. $\rho_1 > \rho_2$, более тяжёлая жидкость стремится провалиться вниз, вследствие чего возмущения поверхности раздела будут нарастать. Состояние равновесия оказывается неустойчивым. Неустойчивость такого рода носит название неустойчивости Релея–Тейлора. Наша задача – найти критерий неустойчивости, сделать соответствующие оценки и проанализировать предельные случаи.

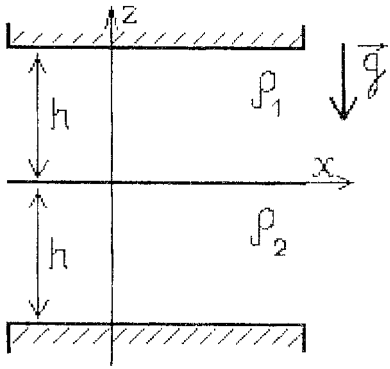


Рис.16

Постановка задачи. Определяющие уравнения

Введём декартову систему координат, как указано на рис. 16. Запишем уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера) и условие несжимаемости

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}, \\ &\operatorname{div} \vec{v} = 0. \end{aligned} \qquad (123)$$

Задача допускает равновесное решение, в котором движение в обоих слоях отсутствует, а граница раздела является плоской и горизонтальной.

Найдем равновесное давление. Спроектируем уравнение Эйлера на координатные оси. В проекции на оси x и y получаем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

в проекции на ось z

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \,. \tag{124}$$

Таким образом, распределение давления в жидкостях в состоянии равновесия зависит только от вертикальной координаты

$$p = p_0 = -\rho g z \,. \tag{125}$$

Пусть в систему внесены возмущения, нарушающие существующее равновесие. Для малых возмущений систему уравнений (123) можно линеаризовать

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \\ &\operatorname{div} \vec{v} = 0. \end{aligned} \tag{126}$$

Граничные условия

Пусть поверхность раздела жидкостей описывается уравнением

$$F(\vec{r}, t) = 0. \tag{127}$$

Тогда в декартовой системе координат уравнение поверхности раздела имеет вид

$$z = \zeta(x, y, t), \tag{128}$$

т.е. $F(\vec{r}, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0$.

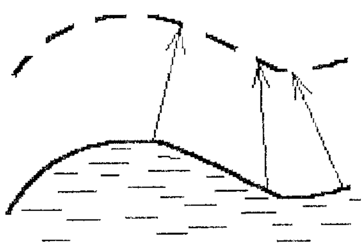


Рис. 17

Кинематическое условие. Поверхность перемещается вместе с жидкостью. Тогда в системе отсчёта, связанной с элементом поверхности жидкости, форма поверхности со временем не меняется

$$\frac{dF}{dt} = 0 \tag{129}$$

(условие вмороженности).

Запишем конвективную производную

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} - \vec{v} \cdot \nabla F = 0. \tag{130}$$

Выражение (130) содержит F и ∇F. Вычислим ∇F с помощью (128)

$$\nabla F = \nabla z - \nabla\zeta(x, y, t) = \vec{e}_z - \nabla\zeta. \qquad (131)$$

Теперь подставим (129) и (131) в (130)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(z - \zeta) + \vec{\mathrm{v}}\cdot(\vec{e_z} - \nabla\zeta) = -\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{e_z} - \vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\zeta = 0.$$

Учтём, что

$$\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{e_z} = w.$$

Получим кинематическое условие на поверхности раздела

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\zeta = w. \qquad (132)$$

Смысл кинематического условия состоит в том, что элементы жидкости не покидают поверхности.

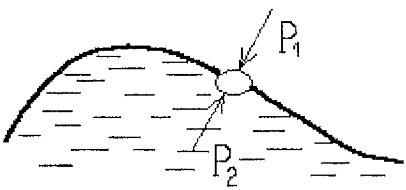


Рис. 18

Динамическое условие. Это условие баланса сил, действующих по нормали к поверхности. На элемент поверхности действуют силы давления и силы поверхностного натяжения:

$$p_1 - p_2 = [p] = -\alpha K, \qquad (133)$$

где $[p]$ – скачок давления на поверхности $z = \zeta$, α – коэффициент поверхностного натяжения, K – кривизна поверхности.

Преобразуем формулу (133). Как было показано в первом параграфе,

$$K = \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{n}}. \qquad (134)$$

Используя формулу (75) для кривизны в случае малых возмущений плоской поверхности, приводим динамическое условие (133) к виду

$$[p] = -\alpha K = \alpha\Delta\zeta. \qquad (135)$$

Линеаризуем кинематическое условие (132)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = w\,.$$

Таким образом, получаем совокупность граничных условий на поверхности раздела:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = w \\ [p] = \alpha \Delta \zeta \end{cases} . \qquad (136)$$

В динамическое условие входит давление при $z = \zeta$ (т.е. на возмущённой поверхности раздела). Перенесем граничные условия на невозмущённую поверхность раздела $(z = 0)$. Для этого разложим давление в ряд Тейлора

$$p\big|_{z=\zeta} = p\big|_{z=0} + \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0} \zeta + \ldots$$

Поскольку $p = p_0 + p'$, $p_0 = -\rho g z$, то

$$p\big|_{z=\zeta} = p_0\big|_{z=0} + p'\big|_{z=0} + \left.\frac{\partial p_0}{\partial z}\right|_{z=0} \zeta + \left.\frac{\partial p'}{\partial z}\right|_{z=0} \zeta + \ldots =$$

$$= p'\big|_{z=0} - \rho g \zeta + \left.\frac{\partial p'}{\partial z}\right|_{z=0} \zeta + \ldots$$

Подставим это разложение в динамическое условие

$$\left[p'\big|_{z=0} - \rho g \zeta + \left.\frac{\partial p'}{\partial z}\right|_{z=0} \zeta + \ldots \right] = \alpha \Delta \zeta\,.$$

Совокупность граничных условий для линеаризованной системы (126) принимает теперь следующий вид:

– условие непроницаемости (z - компонента скорости обращается в нуль на твердых границах):

$$z = \pm h: \quad w = 0\,,$$

– динамическое условие:

$$z = 0: \quad [p'] - [\rho] g \zeta = \alpha \Delta \zeta\,,$$

– кинематическое условие:

$$z = 0: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = w \,.$$

Устойчивость равновесия

Перейдём к решению системы (126). Будем рассматривать нормальные возмущения, т.е. искать решения, имеющие зависимость от времени в виде $e^{\lambda t}$, где λ – инкремент. Если инкремент чисто мнимый, то возмущения не нарастают и не затухают, они являются нейтральными. Если $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, то возмущения нарастают, а если $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, то возмущения затухают.

Пусть $\vec{k}$ – волновой вектор, характеризующий возмущения в системе. Волновой вектор возмущений лежит в плоскости (x, y) и имеет только две отличные от нуля компоненты: k_x и k_y.

Итак, искомые решения имеют вид (штрих опустим)

$$\vec{\mathrm{v}}, p, \zeta \sim e^{\lambda t + i\vec{k}\vec{r}} = e^{\lambda t} e^{k_x x + k_y y}.$$

Подставим этот вид решения в уравнение Эйлера системы (126) и кинематическое условие

$$\lambda \vec{\mathrm{v}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \,.$$

При $z = 0$

$$\lambda \zeta = w = -\frac{1}{\lambda \rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{137}$$

С учетом выражения для скорости перепишем условие непроницаемости.

При $z = \pm h$

$$w = -\frac{1}{\rho \lambda} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \,. \tag{138}$$

Применим операцию дивергенции к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{div}\, \vec{\mathrm{v}} = -\frac{1}{\rho} \Delta p \,. \tag{139}$$

Поскольку жидкость несжимаема, то отсюда следует, что

$$\Delta p = 0 .$$

Учитывая зависимость от горизонтальных координат, получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - k^2 p = 0 . \qquad (140)$$

Подставим $\zeta \sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ в динамическое условие и перепишем его при $z = 0$

$$[p] - [\rho] g\zeta = -\alpha k^2 \zeta . \qquad (141)$$

Потребуем также непрерывности нормальной компоненты скорости при $z = 0$

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right] = 0 . \qquad (142)$$

Перейдём к решению системы уравнений (137) – (141). Рассмотрим сначала уравнение (140):

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, поэтому ищем его частное решение в виде $p \sim e^{qz}$.

Подставляем решение в таком виде в уравнение (140), получаем характеристическое уравнение для q:

$$q^2 - k^2 = 0,$$

$$\alpha = \pm k .$$

Таким образом, решение (140) будет иметь вид

$$p = A_1 e^{-kz} + A_2 e^{kz} .$$

При $z > 0$ имеем $p = p_1$, т.е. $p_1 = C_1 e^{-kz} + C_2 e^{kz}$.

Используем теперь граничное условие (138) при $z > 0$, $z = h$

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial z}\right|_{z=h} = -kC_1 e^{-kh} + kC_2 e^{kh} = 0.$$

Решаем уравнение и находим константы:

$$C_1 e^{-kh} = C_2 e^{kh},$$

$$C_1 = C_2 e^{2kh}.$$

Подставим значения констант в выражение для p_1 :

$$p_1 = C_2 e^{2kh} e^{-kz} + C_2 e^{kz} = C_2 e^{kh} e^{kh-kz} + C_2 e^{kz}.$$

Обозначим $C_2 e^{kh} \equiv C \Rightarrow C_2 = Ce^{-kh}$. Тогда

$$p_1 = Ce^{k(h-z)} + Ce^{k(z-h)} = 2Cch(k(z-h)).$$

Окончательно получаем

$$p_1 = C_1 ch(k(z-h)).$$

Аналогично, при $z < 0$, $p = p_2$, т.е.

$$p_2 = C_3 e^{-kz} + C_4 e^{kz}.$$

Подставим это выражение в граничное условие (138) при $z < 0,$, $z = -h$

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial z}\right|_{z=-h} = -kC_3 e^{kh} + kC_4 e^{-kh} = 0.$$

Находим константы C_3 и C_4

$$C_3 e^{kh} = C_4 e^{-kh},$$

$$C_4 = C_3 e^{2kh}.$$

Подставим найденные значения констант в выражение для p_2

$$p_2 = C_3 e^{-kz} + C_3 e^{2kh} e^{kz} = C_3 e^{-kz} + C_3 e^{kh} e^{kh+kz}.$$

Обозначим $C_3 e^{kh} \equiv C \Rightarrow C_3 = Ce^{-kh}$.

Тогда

$$p_2 = Ce^{-k(z+h)} + Ce^{k(z+h)} = 2C \operatorname{ch} k(z+h).$$

Окончательно получаем

$$p_2 = C_2 \operatorname{ch} k(z+h).$$

Подставим p_1 и p_2 в (142)

$$\left.\left(\frac{1}{\rho_1}kC_1 \operatorname{sh} k(z-h) - \frac{1}{\rho_2}kC_2 \operatorname{sh} k(z+h)\right)\right|_{z=0} =$$

$$= -\frac{1}{\rho_1}kC_1 \operatorname{sh} kh - \frac{1}{\rho_2}kC_2 \operatorname{sh} kh =$$

$$= -k \operatorname{sh} kh \left(\frac{C_1}{\rho_1} + \frac{C_2}{\rho_2}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $C_2 = -\frac{\rho_2}{\rho_1}C_1$.

Подставим p_1 в (137)

$$\lambda\zeta = -\frac{1}{\rho_1\lambda}\left.\frac{\partial p_1}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{1}{\rho_1\lambda}kC_1 \operatorname{sh} k(z-h)\Big|_{z=0} = \frac{1}{\rho_1\lambda}kC_1 \operatorname{sh} kh\ .$$

Получаем $C_1 = \rho_1\zeta\lambda^2 \frac{1}{k \operatorname{sh} kh}$.

Зная C_1, вычислим C_2

$$C_2 = -\frac{\rho_2}{\rho_1}C_1 = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\cdot \rho_1\zeta\lambda^2 \frac{1}{k \operatorname{sh} kh} = -\rho_2\lambda^2\zeta \frac{1}{k \operatorname{sh} kh}\ .$$

Подставим найденные выражения для констант C_1 и C_2 в динамическое условие (141)

$$\left(C_1 \operatorname{ch} k(z-h) - C_2 \operatorname{ch} k(z+h) - [\rho]g\zeta\right)\Big|_{z=0} = -\alpha k^2\zeta;$$

$$\left(\frac{\rho_1\zeta\lambda^2}{k \operatorname{sh} kh} + \frac{\rho_2\zeta\lambda^2}{k \operatorname{sh} kh}\right)\operatorname{ch} kh - [\rho]g\zeta = -\alpha k^2\zeta;$$

$$(\rho_1 + \rho_2)\frac{\lambda^2}{k \operatorname{th} kh} - [\rho]g = -\alpha k^2\ .$$

Отсюда получаем выражение для квадрата инкремента в виде

$$\lambda^2 = \frac{[\rho]g - \alpha k^2}{\rho_1 + \rho_2} k \operatorname{th} kh\ . \qquad (143)$$

Таким образом, скорость роста возмущений зависит от волнового числа. При малых k получаем $\lambda \sim k$.

Очевидно, что при $\lambda^2 > 0$ есть корень с $\mathrm{Re}\lambda > 0$ и возмущения нарастают, т.е. такое состояние неустойчиво; при $\lambda^2 < 0$ $\mathrm{Re}\lambda = 0$ и у инкремента имеется только мнимая часть, в этом случае наблюдаются колебания постоянной амплитуды, неустойчивости нет.

Как видно из формулы (143), на устойчивость оказывает влияние поверхностное натяжение αk^2. Чем меньше длина волны λ, т. е. чем больше волновое число k, тем больше поверхностное натяжение, уменьшающее инкремент. Таким образом, поверхностное натяжение подавляет короткие волны, но не может погасить длинные волны, вследствие чего длинноволновые возмущения нарастают.

При $[\rho] > 0$ неустойчивое состояние, как видно из (143), возникает, если $k < k^*$, где k^* определяется из условия $\lambda^2 = 0$:

$$[\rho]g - \alpha(k^*)^2 = 0,$$

откуда $(k^*)^2 = \dfrac{[\rho]g}{\alpha}$.

Сделаем оценку для двухслойной системы вода – воздух:

$[\rho] \sim 1$ г/см^3; $g \sim 10^3$, г см/сек^2; $\alpha \sim 10^2$ дин/см; $(k^*)^2 \sim \dfrac{1 \cdot 10^3}{10^2} \approx 10$

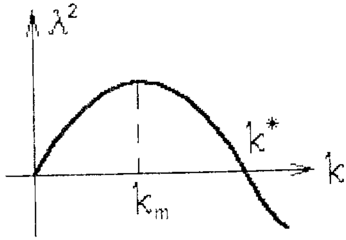
Получаем, что $k^* \sim 3$ см$^{-1}$. Этому волновому числу соответствует длина волны $\lambda_{voln}{}^* = 2\pi / k^* \sim 3$ см.

Таким образом, волны с $\lambda_{voln} > \lambda_{voln}{}^*$ будут нарастать.

Предельные случаи

1. $kh \gg 1$ (толстые слои). Тогда $th(kh) \sim 1$ и формула (143) приобретает вид $\lambda^2 = \dfrac{[\rho]g - \alpha k^2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot k$.

Очевидно, что при определённых длинах волн возмущения становятся наиболее опасными. Построим график зависимости $\lambda^2 = f(k)$



Найдём максимум этой кривой:

$$\frac{d\lambda^2}{dk} = \frac{[\rho]g}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{3\alpha k_m^2}{\rho_1 + \rho_2} = 0\,.$$

Отсюда следует, что

$$k_m^2 = \frac{[\rho]g}{3\alpha} = \frac{1}{3}(k^*)^2\,.$$

Тогда k_m соответствует инкремент

$$\lambda^2 = \frac{[\rho]g - \frac{[\rho]g}{3\alpha}\alpha}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{[\rho]g}{\rho_1 + \rho_2}\sqrt{\frac{[\rho]g}{3\alpha}}\,.$$

2. $kh \ll 1$ (тонкие слои). Тогда $th\,(kh) \approx kh$ и формула (143) имеет вид

$$\lambda^2 = \frac{[\rho]g - \alpha k^2}{\rho_1 + \rho_2}\cdot k^2 h\,.$$

Действуя аналогичным образом, далее получаем

$$\frac{d\lambda^2}{dk} = \frac{2k_m h[\rho]g - 4{k_m}^3 h\alpha}{\rho_1 + \rho_2} = 0\,.$$

Находим отсюда k_m

$$k_m^2 = \frac{[\rho]g}{2\alpha}\,.$$

Тогда k_m соответствует инкремент

$$\lambda^2 = \frac{[\rho]g - \alpha\frac{[\rho]g}{2\alpha}}{\rho_1 + \rho_2}\cdot\frac{[\rho]g}{2\alpha}h = \frac{[\rho]^2 g^2}{4\alpha(\rho_1 + \rho_2)}h\,.$$

Сделаем оценку для того же случая системы вода воздух:
$[\rho] \sim 1$ г/см^3; $g \sim 10^3$ см/сек^2; $\alpha \sim 70$ дин/см; $h \sim 1/20$ см;

$$k_m{}^2 \sim \frac{1\cdot 10^3}{2\cdot 70} \sim \frac{100}{14} \approx 7; \qquad\qquad k_m = \sqrt{7} \approx 2.6\,.$$

Для инкремента получаем

$$\lambda^2 \sim \frac{1\cdot 10^6}{80\cdot 70} \sim \frac{10^4}{56}, \ \lambda \sim \frac{100}{7.6} \approx 13\,.$$

Таким образом, характерное время нарастания возмущений составляет около 0.1 с.

8. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца

В предыдущих главах речь шла об устойчивости состояний равновесия систем с поверхностями раздела. Данная глава посвящена исследованию устойчивости движения.

8.1. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в отсутствие тяжести, при наличии поверхностного натяжения

Рассмотрим два полубесконечных слоя идеальной жидкости, каждый из которых движется как единое целое, причем векторы скорости коллинеарны.

Перейдем в систему отсчета, связанную с нижней жидкостью, ось X находится на границе раздела и направлена вдоль вектора скорости верхнего слоя, ось Z направлена вертикально вверх. В этом случае верхний слой жидкости движется относительно нижнего только вдоль оси X и у вектора скорости основного течения только X-компонента скорости отлична от нуля.

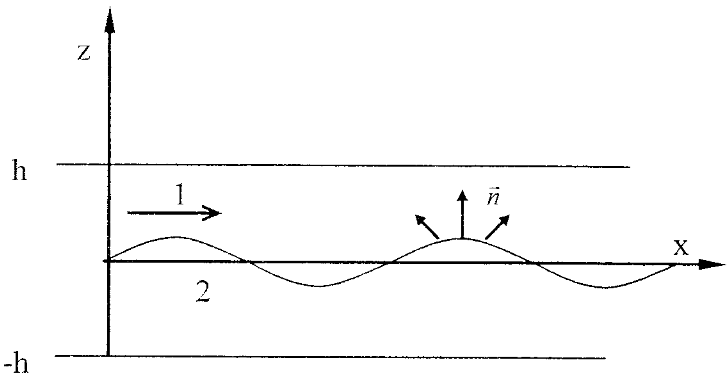


Рис. 19

Зап
ищем уравнения движения идеальной жидкости в отсутствие тяжести:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}} \cdot \nabla \vec{\mathrm{v}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \\
&\operatorname{div} \vec{\mathrm{v}} = 0.
\end{aligned} \tag{144}
$$

Введем малые возмущения $\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_0 + \vec{\tilde{\mathrm{v}}}$, $p = p_0 + \tilde{p}$. Тогда уравнения (144) примут вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_0}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\tilde{\mathrm{v}}}}{\partial t} + \left(\left(\vec{\mathrm{v}}_0 + \vec{\tilde{\mathrm{v}}}\right)\nabla\right)\left(\vec{\mathrm{v}}_0 + \vec{\tilde{\mathrm{v}}}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p_0 + \tilde{p}\right), \\
&\operatorname{div}\left(\vec{\mathrm{v}}_0 + \vec{\tilde{\mathrm{v}}}\right) = 0,
\end{aligned} \tag{145}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_0}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\tilde{\mathrm{v}}}}{\partial t} + (\vec{\mathrm{v}}_0 \nabla)\vec{\mathrm{v}}_0 + (\vec{\mathrm{v}}_0 \nabla)\vec{\tilde{\mathrm{v}}} + (\vec{\tilde{\mathrm{v}}} \nabla)\vec{\mathrm{v}}_0 + (\vec{\tilde{\mathrm{v}}} \nabla)\vec{\tilde{\mathrm{v}}} = \\
&= -\frac{1}{\rho}\nabla p_0 - \frac{1}{\rho}\nabla \tilde{p}, \quad \operatorname{div}\vec{\tilde{\mathrm{v}}} = 0.
\end{aligned} \tag{146}
$$

Заметим, что слагаемые, содержащие сомножителями только основные, невозмущенные величины, в сумме дают нуль. Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим

$$\frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \vec{\tilde{v}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} .$$

В нашем случае $\vec{v}_0 \cdot \nabla \vec{\tilde{v}} = v_0 \frac{\partial}{\partial x} \vec{\tilde{v}}$. Тогда

$$\frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \vec{\tilde{v}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p}. \tag{147}$$

Будем рассматривать однородную по Y задачу, считая $\tilde{v}_y = 0$.

Выпишем проекции уравнения (147) на оси X и Y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \hat{v}_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{p}, \\ \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{v}_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{p}. \end{aligned} \tag{148}$$

Зададим уравнение поверхности раздела, введя функцию F такую, что она обращается в нуль на поверхности раздела, т.е. при $z = \tilde{\zeta}$. В нашем случае $F(x, z, t) = z - \tilde{\zeta}(x, t)$.

Будем рассматривать нормальные возмущения:

$$\left. \begin{aligned} &\tilde{v}_x = u \exp(\lambda t + ikx), \; \tilde{v}_z = w \exp(\lambda t + ikx), \\ &\tilde{\zeta} = \zeta \exp(\lambda t + ikx), \; \tilde{p} = p \exp(\lambda t + ikx). \end{aligned} \right\}$$

Здесь множители при экспонентах являются амплитудами нормальных возмущений при данном z.

Подставляя возмущения в таком виде в уравнения (148) и вводя обозначение $U = v_0$, получим

$$\begin{aligned} &\lambda u + ikUu = -\frac{ik}{\rho} p, \\ &\lambda w + ikUw = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ &iku + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{149}$$

Из последнего уравнения следует $u = \frac{i}{k}\frac{\partial w}{\partial z}$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы (149), получим выражение для давления:

$$p = -\frac{\rho}{k^2}(\lambda + ikU)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Подставим полученное выражение для давления во второе уравнение (149)

$$w(\lambda + ikU) = \frac{1}{k^2}(\lambda + ikU)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Тогда

$$w = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \text{ или} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - k^2 w = 0.$$

Решением этого уравнения является

$$w = A\exp(-kz) + B\exp(kz).$$

Запишем получившиеся выражения для вертикальной составляющей возмущений скорости в верхнем и нижнем слоях с учетом условия затухания возмущений на бесконечности:

$$w_1 = A\exp(-kz),\, w_2 = B\exp(kz).$$

Тогда для амплитуд возмущений давления получаем

$$p_1 = \frac{A\rho_1}{k}(\lambda + ikU),\; p_2 = -\frac{B\rho_2}{k}(\lambda + ikU_2) = -\frac{B\rho_2\lambda}{k}.$$

Рассмотрим граничные условия на поверхности раздела.

Скачок давления на поверхности раздела определяется формулой Лапласа $[p] = \alpha\, div\vec{n}$, где α – коэффициент поверхностного натяжения, а единичный вектор нормали к поверхности, определяемый формулой $\vec{n} = \nabla F / |\nabla F|$.

$$\nabla F = \vec{e_z} - \frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial x}\vec{e_x}.\; |\nabla F| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial x}\right)^2} \cong 1, \text{ тогда } \operatorname{div}\vec{n} = -\frac{\partial^2\tilde{\zeta}}{\partial x^2}.$$

Итак, первое граничное условие на поверхности раздела – динамическое условие имеет вид

$$[\tilde{p}] = -\alpha \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x^2} \text{ или } [p] = \alpha k^2 \zeta \,.$$

Условие непрерывности нормальной компоненты возмущений скорости имеет вид

$$\left[\tilde{\vec{v}} \cdot \vec{n}\right] = \left[\tilde{\vec{v}} \cdot \left(\vec{e}_z - \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x} \vec{e}_x\right) \vec{n}\right] = [\tilde{v}_z] - [\tilde{v}_x] \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x} = 0 \,.$$

В линейном приближении

$$[\tilde{v}_z] - U \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x} = 0 \,.$$

Подставляя сюда найденные выражения для вертикальных компонент возмущений скорости и учитывая зависимость ζ от x, получим

$$A - B = ikU\zeta \,.$$

Кинематическое условие:

$$\tilde{v}_z = \frac{d\tilde{\zeta}}{dt} = \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} + \tilde{\vec{v}} \nabla \zeta \,.$$

В линейном приближении имеем

$$\tilde{v}_z = \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x}$$

или

$$A = \lambda \zeta + ikU\zeta \,.$$

Таким образом, граничные условия на поверхности раздела приобретают вид

$$-\frac{A\rho_1}{k}(\lambda + ikU) - \frac{B\rho_2 \lambda}{k} - \alpha k^2 \zeta = 0 \,,$$

$$A - B - ikU\zeta = 0 \,,$$

$$A - (\lambda + ikU)\zeta = 0 \,.$$

Мы получили систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно A, B и ζ. Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы определитель системы был отличен от нуля.

$$-\frac{\rho_1}{k}(\lambda+ikU)(\lambda+ikU)+\frac{\rho_2\lambda}{k}ikU-\alpha k^2-\frac{\rho_2\lambda}{k}(\lambda+ikU)=0\,.$$

Упрощая это выражение, получаем квадратное уравнение для λ:

$$\lambda^2(\rho_1+\rho_2)-2ik\rho_1U\lambda-\rho_1k^2U^2+\alpha k^3=0\,,$$

$$D=\rho_1\rho_2k^2U^2-\alpha k^3(\rho_1+\rho_2)\,,$$

$$\lambda=\frac{ik\rho_1U\pm\sqrt{\rho_1\rho_2k^2U^2-\alpha k^3(\rho_1+\rho_2)}}{(\rho_1+\rho_2)}\,. \qquad (150)$$

Мы получили выражение для инкремента нарастания возмущений. Если подкоренное выражение в (150) отрицательно, то инкремент чисто мнимый нарастающих возмущений нет, т.е. при этом мы имеем дело с устойчивостью. Если же подкоренное выражение положительно, то одно из значений инкремента будет обладать положительной вещественной частью и возмущение нарастает – случай неустойчивости. Таким образом, для определения границы области устойчивости надо положить равным нулю подкоренное выражение

$$\rho_1\rho_2k^2U^2-\alpha k^3(\rho_1+\rho_2)=0\,.$$

Отсюда получаем критическую скорость жидкости, начиная с которой возмущения с данным волновым числом будут нарастать:

$$U^2=\alpha\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}k\,.$$

8.2. Неустойчивость Кельвина - Гельмгольца при наличии тяжести, в отсутствие поверхностного натяжения

Исследуем возникновение неустойчивости Кельвина – Гельмгольца в поле тяжести. Рассмотрим сначала случай, когда поверхностное натяжение отсутствует. В этом случае давление в основном состоянии не постоянно, оно является функцией вертикальной координаты z. Давление в верхней жидкости имеет вид $p_{01} = -\rho_1 g z$, а в нижней - $p_{02} = -\rho_2 g z$.

Система уравнений, описывающая поведение данной системы, такова:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{1z} - \zeta_x U = \varphi_{2z}, \\
&-\rho_1\varphi_{1t} - \rho_1 U\varphi_{1x} - \rho_1 g\zeta = -\rho_2\varphi_{2t} - \rho_2 g\zeta, \\
&\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \varphi_{2z}.
\end{aligned} \tag{151}$$

Будем искать решение в виде $\varphi_1, \varphi_2, \zeta \sim e^{\lambda t} e^{ikx}$ (нормальные возмущения). Учтем, что производная по координате z в первой жидкости дает множитель $-k$, а во второй – множитель k, поскольку $\varphi_1 \sim e^{-kz}$ и $\varphi_2 \sim e^{kz}$. Подставляя данное решение в систему (151), получаем

$$\begin{aligned}
&-k\varphi_1 - ik\zeta U = k\varphi_2, \\
&-\rho_1\lambda\varphi_1 - \rho_1 Uik\varphi_1 - \rho_1 g\zeta = -\rho_2\lambda\varphi_2 - \rho_2 g\zeta, \\
&\lambda\zeta = k\varphi_2.
\end{aligned} \tag{152}$$

Находя из последнего уравнения ζ и подставляя его в первое уравнение, получаем выражение для φ_1:

$$\varphi_1 = -\varphi_2 + ikU\frac{k}{\lambda}\varphi_2. \tag{153}$$

С учетом выражения (153) из второго уравнения системы (152) получаем следующее уравнение:

$$\rho_1\lambda\left(1 + ik\frac{U}{\lambda}\right) + \rho_1 Uik\left(1 + ik\frac{U}{\lambda}\right) - \rho_1 g\frac{k}{\lambda} = -\rho_2\lambda - \rho_2 g\frac{k}{\lambda}. \tag{154}$$

Умножим обе части полученного равенства (154) на λ:

$$\rho_1\lambda^2 + i\rho_1 kU\lambda + \rho_1 Uik\lambda - \rho_1 U^2k^2 - \rho_1 gk + \rho_2\lambda^2 - \rho_2 gk = 0. \tag{155}$$

Сгруппируем слагаемые при одинаковых степенях λ:

$$(\rho_1 + \rho_2)\lambda^2 + 2\rho_1 Uik\lambda - \rho_1 U^2k^2 + gk(\rho_2 - \rho_1) = 0. \tag{156}$$

Мы получили уравнение для нахождения инкремента возмущений, оно имеет либо действительное, либо комплексное решение в зависимости от того, каков знак дискриминанта:

$$\Delta = k^2 U^2 \rho_1 \rho_2 - \left(\rho_2^{\,2} - \rho_1^{\,2}\right) gk \,. \tag{157}$$

Если $\Delta > 0$, то имеет место неустойчивость, при $\Delta < 0$ – устойчивость.

При большой силе тяжести $\Delta < 0$, т.е. имеет место устойчивость. Таким образом, сила тяжести оказывает стабилизирующее действие. Однако короткие волны не могут быть стабилизированы силой тяжести.

Граница устойчивости определяется следующим выражением:

$$U^2 = \frac{\rho_2^{\,2} - \rho_1^{\,2}}{\rho_1 \rho_2} \frac{g}{k} \,. \tag{158}$$

При любой разности скоростей будет наблюдаться неустойчивость.

8.3. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца при наличии тяжести и поверхностного натяжения

Рассмотрим теперь влияние поверхностного натяжения. Учитывая капиллярные силы в условии баланса нормальных напряжений, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\varphi_{1z} - \zeta_x U = \varphi_{2z}, \\ &-\rho_1 \varphi_{1t} - \rho_1 U \varphi_{1x} - \rho_1 g \zeta = -\rho_2 \varphi_{2t} - \rho_2 g \zeta + \alpha \zeta_{xx}, \\ &\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \varphi_{2z}, \end{aligned} \tag{159}$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения. Тогда в выражении для дискриминанта (157), определяющего границу устойчивости относительно нормальных возмущений, фактически будет произведена следующая замена :

$$\left(\rho_1 - \rho_2\right) g \to \left(\rho_1 - \rho_2\right) g - k^2 \alpha \,. \tag{160}$$

При этом получим

$$\Delta = k^2 U^2 \rho_1 \rho_2 - \left(\rho_2^{\,2} - \rho_1^{\,2}\right) gk - \left(\rho_1 - \rho_2\right) \alpha k^3 \,. \tag{161}$$

Граница устойчивости будет определяться следующим равенством:

$$U^2 = \frac{\rho_2^{\,2} - \rho_1^{\,2}}{\rho_1 \rho_2} \frac{g}{k} + \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_1 \rho_2} \alpha k\,. \tag{162}$$

Нейтральная кривая (162) разделяет области устойчивости и неустойчивости.

Найдем экстремумы данной функции, для этого вычислим производную по волновому числу от этой функции и приравняем ее нулю.

$$\frac{\rho_2^{\,2} - \rho_1^{\,2}}{\rho_1 \rho_2} g \frac{(-1)}{k^2} + \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_1 \rho_2} \alpha = 0\,. \tag{163}$$

Умножив обе части равенства на $\dfrac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_2 + \rho_1)\alpha} k^2$, получаем выражение для k_c:

$$k_c^{\,2} = \frac{\rho_2^{\,2} - \rho_1^{\,2}}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g}{\alpha}. \tag{164}$$

Граница устойчивости на плоскости параметров квадрат критической скорости – волновое число изображена на рис. 21.

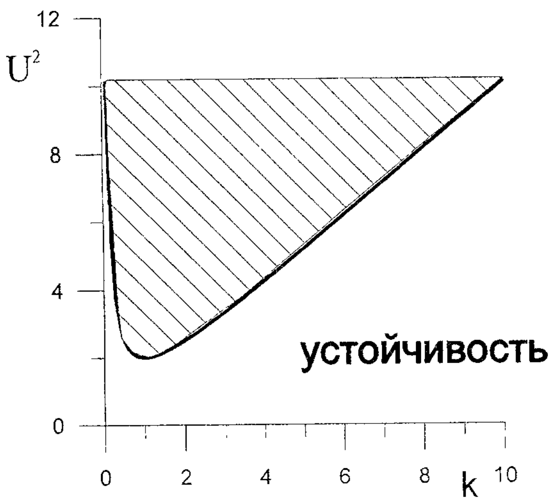


Рис.21

8.4. Неустойчивость Кельвина – Гельмгольца в поле тяжести и горизонтальных вибраций

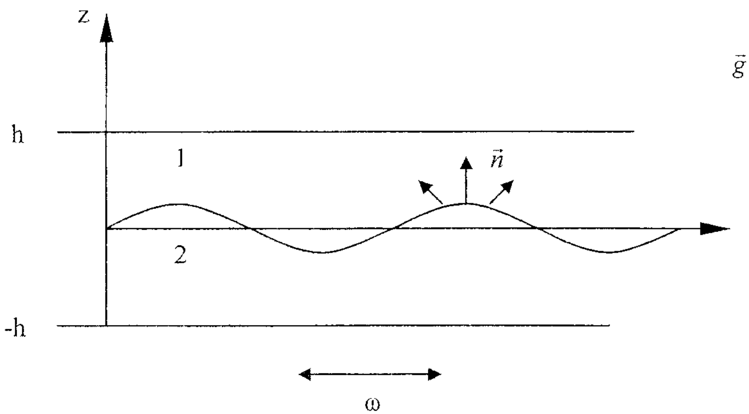


Рис.22

Рассмотрим бесконечный в горизонтальных направлениях слой толщиной $2h$, заполненный двумя несмешивающимися жидкостями с плотностями ρ_1 и ρ_2. Слой совершает колебания в горизонтальном направлении с частотой ω и амплитудой a. Вдоль оси вибраций направим ось x. Ось z декартовой системы координат направлена вертикально вверх так, что в отсутствие вибраций тяжелая жидкость занимает область $0 > z > -h$, легкая жидкость – область $0 < z < h$.

Уравнения движения в пренебрежении вязкой диссипацией в системе отсчета, связанной с границами слоя, запишутся в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + a\omega^2 \cos(\omega t) \vec{e}_x . \qquad (165)$$

Введем потенциал скорости φ соотношением

$$\vec{v} = \nabla \varphi . \qquad (166)$$

Тогда из условия несжимаемости $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ получаем

$$\Delta\varphi = 0\,. \tag{167}$$

Для определения давления будем использовать уравнение Бернулли для потенциального течения (так называемый интеграл Коши Лагранжа):

$$p = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2}(\nabla\varphi)^2 + a\omega^2\rho x\cos\omega t - \rho g z + const\,. \tag{168}$$

На границе раздела двух жидкостей $z = \xi(x,t)$, где ξ – функция, описывающая форму поверхности раздела, выполняются условия баланса нормальных напряжений, непрерывности нормальной составляющей скорости и кинематическое условие

$$-[p] = \alpha\,\mathrm{div}\,\vec{n} = \alpha K\,, \tag{169}$$

$$[\vec{n}\cdot\nabla\varphi] = 0\,, \tag{170}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \nabla\varphi\cdot\nabla\xi = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{171}$$

Здесь $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности раздела, α – коэффициент поверхностного натяжения, K – кривизна поверхности раздела.

На твердых границах ставятся условия непроницаемости

$$z = \pm h: \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\,. \tag{172}$$

Кроме того, предполагается выполненным условие замкнутости течения:

$$\int\limits_{\xi}^{h}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dz + \int\limits_{-h}^{\xi}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}dz = 0. \tag{173}$$

Основное состояние

Поставленная задача допускает простое решение, соответствующее плоской границе раздела ($\xi = 0$) и плоскопараллельному течению, скорость которого в каждой жидкости постоянна. Поскольку скорость основного течения не зависит от x, то φ есть линейная функция от x: $\varphi_{1,2}(x,t) = V_{1,2}(t)\,x$. Подставляя потенциалы в таком виде в условие замкнутости течения, получим соотношение, определяющее скорости встречных потоков:

$$V_1(h-\xi)+V_2(\xi+h)=0\,.$$

Если $\xi=0$, то получим $V_2=-V_1$.

Используя это соотношение и подставляя (168) в (169), получаем

$$(\rho_1-\rho_2)\dot{V}_1 x+(\rho_1-\rho_2)\left(\frac{1}{2}V_1^2-a\omega^2 x\cos\omega t+g\xi\right)=\alpha K+const\,.$$

Собирая слагаемые, содержащие x, и интегрируя по времени, находим скорость в системе отсчета слоя

$$\begin{array}{l} V_1=Ra\omega\sin\omega t \\ V_2=-Ra\omega\sin\omega t \end{array},\quad R=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\,.$$

Таким образом, скорости в двух слоях жидкости направлены в противоположные стороны и можно ожидать развития неустойчивости Кельвина – Гельмгольца на границе встречных потоков.

Поскольку слой очень длинный, но замкнутый, то при воздействии вибраций поверхность раздела вблизи стенок деформируется, а в основном объеме жидкости граница раздела остается плоской. Если бы сосуд был короткий, то на поверхности раздела существовали бы волны. Таким образом, в нашей задаче, где рассматривается невязкая жидкость и одновременно плоская граница раздела, мы неявно учитываем вязкость.

Анализ устойчивости

Рассмотрим теперь возмущение границы раздела: $F(x,z,t)=0=z-\xi(x,t)$. Нам понадобится выражение для вектора нормали к поверхности раздела. Для этого вычислим градиент функции F:

$$\nabla F=\nabla z-\nabla\xi=\vec{e}_z-\xi_x\vec{e}_x. \tag{174}$$

Тогда нормаль к границе раздела для малых возмущений запишется в виде

$$\vec{n}=\frac{\nabla F}{\nabla F}=\frac{\vec{e}_z-\xi_x\vec{e}_x}{\sqrt{1+\xi_x^{\,2}}}\simeq\vec{e}_z-\xi_x\vec{e}_x.$$

Примем следующие обозначения для скорости течения $\vec{v}$: $\vec{V}$ – основное течение, $\vec{v}'$ – малые возмущения скорости течения. Тогда

$$\vec{n} \cdot \nabla\varphi \to \vec{e}_z \cdot \nabla\varphi - \xi_x \vec{V} \cdot \vec{e}_x = \varphi_z - \xi_x V .$$

Теперь условие непрерывности нормальных составляющих скорости и кинематическое условие при $z = 0$ перепишутся в виде

$$[\varphi_z] = \xi_x [V], \xi_t + [V]\xi_x = \varphi_z .$$

В дальнейшем будем использовать эти граничные условия для определения констант при решении уравнения Лапласа для потенциала $\Delta\varphi = 0$. Для нормальных возмущений, пропорциональных $\exp(ikx)$, это уравнение принимает вид

$$\varphi_{zz} - k^2\varphi = 0 .$$

Решения этого уравнения, удовлетворяющие граничным условиям непроницаемости на границах слоя, имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_1 \operatorname{ch} k(z-h), \\ \varphi_2 &= C_2 \operatorname{ch} k(z+h). \end{aligned} \qquad (175)$$

Подставляя это решение в кинематическое условие, получаем для констант C_1, C_2 выражения

$$C_1 = -\frac{\xi_t + ikV_1\xi}{k \operatorname{sh} kh}, \; C_2 = \frac{\xi_t - ikV_1\xi}{k \operatorname{sh} kh},$$

а подстановка решения (175) в уравнение (168) после его линеаризации приводит к соотношению

$$\left(\rho_1\dot{C}_1 - \rho_2\dot{C}_2 + ik(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)V_1\right)\operatorname{ch} kh + (\rho_1 - \rho_2)g\xi = \alpha k^2 \xi , \qquad (176)$$

где учтено, что $V_2 = -V_1$.

Подставляя в (176) выражения для C_1, C_2 и приводя подобные, получаем

$$\begin{aligned} &-(\rho_1+\rho_2)\ddot{\xi} - 2ikV_1(\rho_1-\rho_2)\dot{\xi} - ik(\rho_1-\rho_2)\dot{V}_1\xi + \\ &+k^2(\rho_1+\rho_2)V_1^2\xi + \left(\alpha k^3 - (\rho_1-\rho_2)kg\right)\xi \operatorname{th} kh = 0. \end{aligned} \qquad (177)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени.

Поделив (177) на сумму плотностей и введя обозначение

$$B = \frac{\alpha k^3 - [\rho_1]kg}{\rho_1 + \rho_2} \operatorname{th} kh\,.$$

получаем окончательно дифференциальное уравнение второго порядка для ξ:

$$\ddot{\xi} + 2ikRV_1\dot{\xi} + ikR\dot{V}_1\xi - k^2V_1^2\xi = -B\xi. \tag{178}$$

Сведение к уравнению Матье

Удобно сделать замену переменных для исключения слагаемых с первой производной неизвестной функции. Для этого будем искать решение уравнения (178) в виде $\xi = Y(t)e^{\Phi(t)}$, где функцию $\Phi(t)$ подберем сами. Получаем для $\Phi(t)$ уравнение

$$\ddot{Y} + \dot{\Phi}^2 Y + \dot{Y}\left(2\dot{\Phi} + 2ikRV_1\right) + Y\left(\ddot{\Phi} + \dot{\Phi} + ikR\dot{V}_1 - k^2V_1^2\right) = -BY\,. \tag{179}$$

Чтобы избавиться от слагаемых с первой производной по времени, потребуем $2\dot{\Phi} + 2ikRV_1 = 0$, откуда $\dot{\Phi} = -ikR^2a\omega\sin\omega t$, а сама функция $\Phi(t)$ дается выражением

$$\Phi = aikR^2\cos\omega t\,. \tag{180}$$

Поскольку $\Phi(t)$ чисто мнимое, функции $\xi(t)$ и $Y(t)$ эквивалентны с точки зрения устойчивости. Действительно, $|\xi(t)| = |Y(t)|$, т.е., если $Y(t)$ нарастает, то и $\xi(t)$ нарастает, и наоборот.

Учитывая (180), из (179) получаем уравнение для $Y(t)$:

$$\ddot{Y} + \left(\Omega^2 - Q\sin^2\omega t\right)Y = 0\,, \tag{181}$$

где введены обозначения

$$\Omega^2 = B = \frac{\alpha k^3 + (\rho_2 - \rho_1)kg}{\rho_1 + \rho_2} \operatorname{th} kh \tag{182}$$

$$Q = (a\omega kR)^2\,.$$

Уравнение (181) представляет собой одну из возможных форм записи известного уравнения Матье. Полный анализ его решений выходит за рамки настоящего изложения. Мы ограничимся рассмотрением высокочастотного случая. В этом случае можно просто заменить в уравнении (181) переменный коэффициент его средним по времени значением. Учитывая, что среднее значение квадрата синуса равно одной второй, получаем

$$\ddot{Y} + \left(\Omega^2 - \frac{1}{2}Q\right)Y = 0\,. \tag{183}$$

Нарастающие решения уравнения (183) существуют, если коэффициент перед Y отрицателен, т.е. условие неустойчивости имеет вид

$$Q > 2\Omega^2 \tag{184}$$

или, подставляя сюда (182):

$$(a\omega R)^2 > 2\,\frac{\alpha k + (\rho_2 - \rho_1)k^{-1}g}{\rho_1 + \rho_2}\,\mathrm{th}\,kh\,. \tag{185}$$

Соотношение (185) принимает более компактную форму, если ввести безразмерные параметры. Удобно обезразмерить волновое число возмущений по капиллярной длине

$$l_c = \sqrt{\frac{\alpha}{(\rho_2 - \rho_1)g}}\,.$$

Введем также безразмерный параметр, характеризующий интенсивность вибраций

$$A = \frac{a^2\omega^2R^2(\rho_1 + \rho_2)l_c^3}{2\alpha}$$

и безразмерную толщину слоев жидкости

$$H = \frac{h}{l_c}\,.$$

В терминах введенных параметров граница устойчивости дается уравнением

$$A = \left(k + \frac{1}{k}\right)\mathrm{th}\,kH\,. \tag{186}$$

Вид нейтральной кривой $A(k)$ зависит от параметра H. Рассмотрим предельные случаи.

Тонкие слои $H \ll 1$. В этом случае $\operatorname{th} kH \approx kH$ и из (186) получаем

$$A = \left(k^2 + 1\right) H . \tag{187}$$

Как видно, при этом наиболее опасными являются длинноволновые возмущения, а пороговое значение параметра A равно H.

Толстые слои. В противоположном предельном случае толстых слоев $\operatorname{th} kH \approx 1$, для A получаем

$$A = k + \frac{1}{k} . \tag{188}$$

Минимум этого выражения лежит при $k = 1$ и равен 2.

Очевидно, должно существовать некоторое критическое значение $H = H_*$, так что при $H < H_*$ имеется длинноволновая

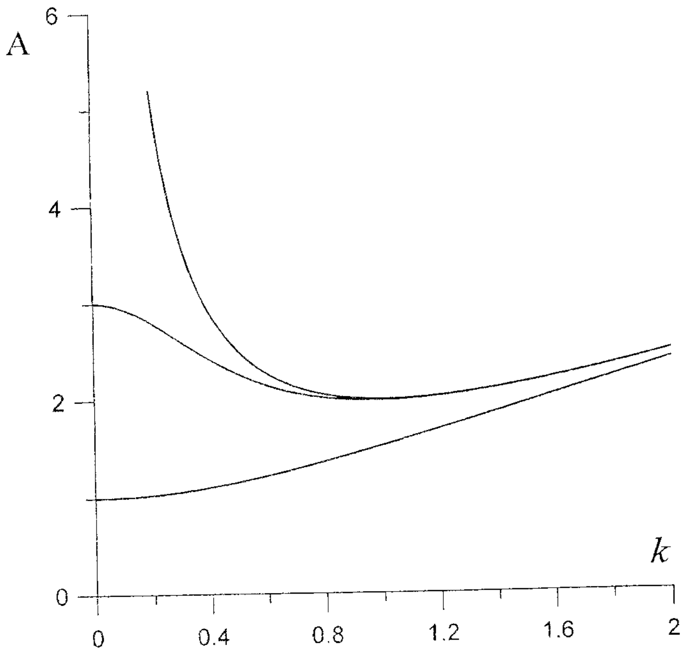


Рис. 23

неустойчивость, а при обратном неравенстве за неустойчивость ответственны возмущения с конечной длиной волны. Для определения H_* исследуем длинноволновую асимптотику выражения (186).

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора

$$\operatorname{th} kH = kH - \frac{1}{3}(kH)^3 + \ldots$$

Тогда имеем

$$A = H + k^2\left(H - \frac{1}{3}H^3\right) + \ldots \tag{189}$$

Из (189) видно, что $H_* = \sqrt{3}$: если $H < H_*$, то при $k = 0$ лежит минимум, а при $H > H_*$ – максимум.

На рис. 23 приведены нейтральные кривые $A(k)$ для $H = 1, 3, \infty$.

9. Неустойчивость свободной поверхности жидкости в поле тяжести и вертикальных вибраций (рябь Фарадея)

Рассмотрим устойчивость горизонтальной свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости в поле тяжести и вертикальных вибраций. Будем учитывать влияние поверхностного натяжения.

Запишем уравнения Навье – Стокса в системе отсчета, связанной с колеблющимся сосудом:

$$\begin{aligned} &\rho\vec{v}_t + \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v} + \rho(g - a\omega^2\cos\omega t)\vec{\gamma}, \\ &\operatorname{div}\vec{v} = 0. \end{aligned} \tag{190}$$

Будем считать течение потенциальным. Тогда скорость можно представить как $\vec{v} = \nabla\varphi$. Подставляя это выражение в (190), получим

$$\begin{aligned} &p = -\rho\left(\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + (g - a\omega^2\cos\omega t)z\right), \\ &\Delta\varphi = 0. \end{aligned} \tag{191}$$

Представим давление в виде суммы основного и возмущенного: $p = p_0 + p'$, при этом будем полагать, что скорости малы. Тогда слагаемым $(\nabla\varphi)^2$ можем пренебречь.

Выражения для давления запишутся в виде

$$p_0 = -(\rho g - a\omega^2 \cos\omega t)z\,, \tag{192}$$

$$p' = -\rho\varphi_t\,. \tag{193}$$

Рассмотрим граничные условия.

Поверхность жидкости свободна. Тогда кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности запишутся в виде

$$\zeta_t + \vec{v}\cdot\nabla\zeta = \varphi_z\,, \tag{194}$$

$$-[p]n_i + [\sigma_{ij}]n_j = \alpha n_i K\,, \tag{195}$$

где ζ - малое возмущение поверхности: $z = \zeta(x,t)$.

С учетом малости возмущений и отсутствия среды снаружи условия (194) и (195) запишутся в виде

$$\zeta_t = \varphi_z\,, \tag{196}$$

$$-p + 2\eta\varphi_{zz} = \alpha\zeta_{xx}$$

или

$$-p' - p_{0z}\,|_{z=0}\,\zeta + 2\eta\varphi_{zz} = \alpha\zeta_{xx}\,. \tag{197}$$

Найдем потенциал из уравнения непрерывности (191):

$$\varphi = A(t)e^{kz}e^{ikx}\,. \tag{198}$$

Из кинематического условия (196) имеем

$$\zeta_t = kA(t)e^{kz}e^{ikx}\,. \tag{199}$$

Тогда

$$\zeta = k\int A(t)dt\cdot c^{kz}e^{ikx}\,. \tag{200}$$

Подставив в динамическое условие (197) выражения (192). (193), (198) и (200), получим

$$\rho A_t e^{kz} e^{ikx} + (\rho g - \rho a\omega^2 \cos\omega t)\zeta - 2\eta k^2 A c^{kz} e^{ikx} = -\alpha k^2 \zeta .$$

Воспользовавшись (199), получим

$$\zeta_{tt} + 2\nu k^2 \zeta_t + (gk - a\omega^2 k \cos\omega t + \frac{\alpha}{\rho} k^3)\zeta = 0 . \tag{201}$$

Отметим, что описанный способ учета вязкости является приближенным и пригоден только при малых вязкостях, так как движение вязкой жидкости является, вообще говоря, непотенциальным. Формально это проявляется в том, что потенциальное течение не может удовлетворить условию отсутствия касательных напряжений на свободной границе, поэтому мы использовали только проекцию (195) на нормаль. Однако при малых вязкостях пограничный слой, в котором касательные напряжения быстро спадают, тонок, и не вносит существенного вклада в диссипацию.

Произведем обезразмеривание задачи. Для этого в качестве единиц измерения времени выберем ω^{-1} и воспользуемся обозначениями $\omega_0^2 = kg + \frac{\alpha}{\rho} k^3$, $\Omega = \frac{\omega_0}{\omega}$, $\gamma = \frac{2\nu k^2}{\omega}$, $A = ak$. В результате (201) принимает вид

$$\zeta_{tt} + \gamma\zeta_t + (\Omega^2 - A\cos t)\zeta = 0 . \tag{202}$$

Мы получили уравнение Матье с диссипацией. Как известно, в отсутствие диссипации и при малых амплитудах модуляции это уравнение описывает возбуждение параметрического резонанса в зонах, примыкающих к точкам $\Omega = \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, 3\dots$. Рассмотрим первую такую зону.

Будем считать, что γ мало и Ω близко к 0.5:

$$\Omega^2 = \frac{1}{4} + \delta. \tag{203}$$

где δ – малый параметр.

Для решения (202) воспользуемся методом многих масштабов. Представим решение и все параметры в виде рядов по формальному малому параметру ε и введем иерархию времен:

$$\delta = \varepsilon\delta_1 + \dots,\ \gamma = \varepsilon\gamma_1 + \dots,\ A = \varepsilon A_1 + \dots,\ \zeta = \zeta_0 + \varepsilon\zeta_1 + \dots,$$

$$t_0 = t\,,\ t_1 = \varepsilon t\,,\ \dots,\ D = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, D = \frac{\partial}{\partial t}\,.$$

В главном порядке разложения получаем:

$$\varepsilon^0 : D_0^2\zeta_0 + \frac{1}{4}\zeta_0 = 0\,, \tag{204}$$

откуда

$$\zeta_0 = ae^{it/2} + be^{-it/2}\,,$$

т.е. поверхность совершает периодические колебания с частотой $\Omega = 1/2$. В следующем порядке получаем неоднородное уравнение

$$\varepsilon^1 : D_0^2\zeta_1 + \frac{1}{4}\zeta_1 = -2D_0D_1\zeta_0 - \gamma_1 D_0\zeta_0 - \delta_1\zeta_0 + A_1\zeta_0\cos t\,.$$

В правой части имеются резонансные слагаемые, которые породят в решении секулярные слагаемые, зависящие от времени как $te^{\pm it/2}$. Наличие таких слагаемых нарушает равномерную пригодность разложений по времени, поэтому мы должны потребовать уничтожения резонансных слагаемых. Исключая их, получим систему уравнений для амплитуд:

$$\begin{cases} iD_1 a + \dfrac{i}{2}\gamma_1 a + \delta_1 a - \dfrac{A_1}{2}b = 0 \\ iD_1 b - \dfrac{i}{2}\gamma_1 b - \delta_1 b + \dfrac{A_1}{2}a = 0 \end{cases}. \tag{205}$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решаем ее стандартным способом.

Пусть a и b пропорциональны $e^{\lambda t_1}$, λ – инкремент нарастания возмущений, тогда система (205) превращается в алгебраическую:

$$\begin{cases} i\lambda a + \dfrac{i}{2}\gamma_1 a + \delta_1 a - \dfrac{A_1}{2} b = 0 \\ i\lambda b + \dfrac{i}{2}\gamma_1 b - \delta_1 b + \dfrac{A_1}{2} a = 0 \end{cases} \qquad (206)$$

Условие существования нетривиального решения системы (206), т.е. равенство нулю ее определителя, имеет вид

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\gamma_1\right)^2 + \delta_1^2 = \frac{1}{4}A_1^2 . \qquad (207)$$

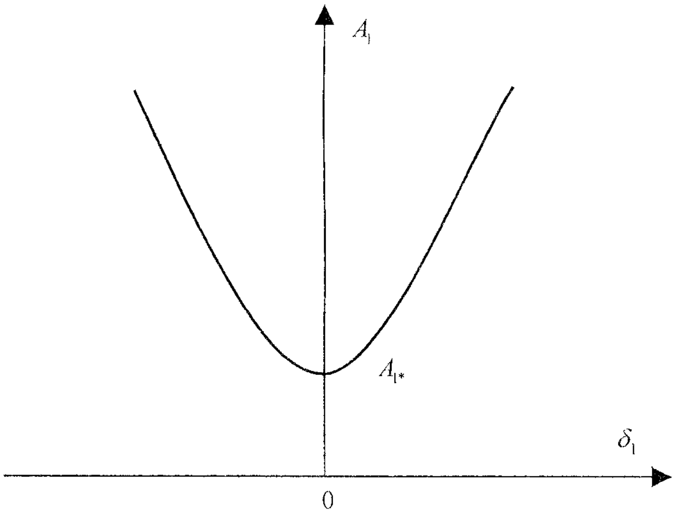


Рис.24

На границе устойчивости инкремент λ обращается в нуль, поэтому область неустойчивости на плоскости $A_1 - \delta_1$ ограничена гиперболой

$$\frac{1}{4}\gamma_1^2 + \delta_1^2 = \frac{1}{4}A_1^2 . \qquad (208)$$

минимум которой лежит при нулевой расстройке частоты $(\delta_1 = 0)$, а пороговая амплитуда A_{1*} пропорциональна диссипации $A_{1*} = \gamma_1$ (рис. 24).

Содержание

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Любимов Дмитрий Викторович
Любимова Татьяна Петровна

Физическая гидродинамика. Расчетный семинар

Учебное пособие

Редактор *Н.И.Стрекаловская*
Корректор *А.И.Цветкова*
Компьютерная верстка *Т.П.Любимовой*

Подписано в печать 26.12.2007. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 5,35. Уч.- изд. л. 2,8. Тираж 100 экз. Заказ 48.

Редакционно-издательский отдел Пермского государственного университета. 614990. Пермь, ул. Букирева, 15
Типография Пермского государственного университета
614990. Пермь, ул. Букирева, 15